Exercice 1 :

(1) M_n est bien adapté (et intégrable)

et $E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n]$

$= E[S_{n+1} - (n+1)\alpha | \mathcal{F}_n]$

$= E[\underbrace{S_n}_{\text{mesurable par rapport à } \mathcal{F}_n} + \underbrace{X_{n+1}}_{\text{indépendant de } \mathcal{F}_n} | \mathcal{F}_n] - (n+1)\alpha$

$= S_n + E[X_{n+1}] - (n+1)\alpha$

$= S_n + \alpha - (n+1)\alpha =$

$= S_n - n\alpha = M_n$

Donc M_n est une martingale.

(2) M_n étant une martingale, on a $E[M_n] = E[M_0] = 0$

et $E[S_n] = E[M_n + n\alpha]$

$= n\alpha.$

(On aurait aussi pu faire le calcul directement).

Exercice 2 :

La probabilité cherchée vaut donc

$$P = \frac{\text{Nombre de chemins allant de } A \text{ à } A \text{ de longueur } 2N \text{ et ne touchant pas } 0}{\text{Nombre total de chemins de longueur } 2N}$$

Le nombre total de chemins de longueur $2N$ est : 2^{2N}.

Par le principe de réflexion, le nombre de chemins de A à A de longueur $2N$ ne touchant pas 0 est égal au nombre de chemins allant de A à A moins celui des chemins allant de A à $-A$ (et de longueur $2N$).

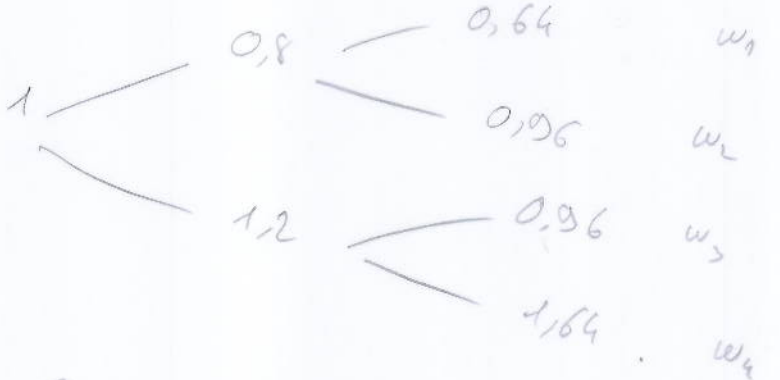
Il y a : $\begin{pmatrix} N \\ 2N \end{pmatrix}$ chemins de A à A de longueur $2N$ (N montées, N descendantes).

Il y a : $\begin{pmatrix} N-A \\ 2N \end{pmatrix}$ chemins de A à $-A$ de longueur $2N$ ($N-A$ montées, $N+A$ descentes)

d'où si $N \geq A$, $\boxed{P = \dfrac{\begin{pmatrix} N \\ 2N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N-A \\ 2N \end{pmatrix}}{2^{2N}}}$ si $N \geq A$ (et 0 sinon).

Exercice 3

1) Représentons seulement l'actif risqué $S_n^{(1)}$



2) On a $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \sigma(S_1^{1})$

$S_1^{(1)}$ prend 2 valeurs 0,8 et 1,2.

$S_1^{(1)\,-1}(\{0,8\}) = \{\omega_1, \omega_2\}$.

$S_1^{(1)\,-1}(\{1,2\}) = \{\omega_3, \omega_4\}$.

donc $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1,\omega_2\}, \{\omega_3,\omega_4\}, \Omega\}$.

3) Avec $r = 0,1$,
$1 = (1+r)^0$
$1,1 = (1+r)^1$
$1,21 = (1+r)^2$

Le taux d'intérêt de l'actif sans risque est $r = 0,1$.

4) $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre si sous $\mathbb{P}^*$ le prix de l'actif risqué actualisé est une martingale.

4

On a $E^*[\tilde{S}_1^{①} | \mathcal{F}_0]$

$$= E[\tilde{S}_1^{①}] = \frac{0,8 \times \frac{1}{16} + 0,8 \times \frac{3}{16} + 1,2 \times \frac{3}{16} + 1,2 \times \frac{9}{16}}{1,1}$$

$$= \underline{1}.$$

donc $E^*[\tilde{S}_1^{①} | \mathcal{F}_0] = 1$

- Maintenant $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$.

pour $\boxed{\omega = \omega_1 \text{ ou } \omega_2}$

$$E^*[\tilde{S}_2^{①} | \mathcal{F}_1](\omega) = \frac{1}{P^*(\{\omega_1,\omega_2\})} E^*[\tilde{S}_2^{①} \times 1_{\{\omega_1,\omega_2\}}]$$

$$= \frac{1}{P^*(\{\omega_1,\omega_2\})} \left(P^*(\omega_1) . \tilde{S}_2^{①}(\omega_1) + P^*(\omega_2) \tilde{S}_2^{①}(\omega_2) \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{0,64}{1,21} + \frac{3}{16} \cdot \frac{0,96}{1,21} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1,21} (1 \times 0,64 + 3 \times 0,96)$$

$$= \frac{3,52}{4 \times 1,1 \times 1,1} = \frac{0,8}{1,1} = \tilde{S}_1^{①}(\omega)$$

pour $\boxed{\omega = \omega_3 \text{ ou } \omega_4}$

$$E^*[\tilde{S}_2^{①} | \mathcal{F}_1](\omega) = \frac{1}{P^*(\{\omega_3,\omega_4\})} \left(P^*(\omega_3) \tilde{S}_2^{①}(\omega_3) + P^*(\omega_4) . \tilde{S}_2^{①}(\omega_4) \right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{12}{16}\right)} \left(\frac{3}{16} \times 0,96 + \frac{9}{16} \times 1,44 \right) \times \frac{1}{(1,1)^2}$$

$$= \frac{3 \times 0,96 + 9 \times 1,44}{12} \times \frac{1}{(1,1)} \times \left(\frac{1}{1,1}\right)$$

$$= \frac{1,2}{1,1} = \tilde{S}_1^{①}(\omega)$$

$\cdot \left(\tilde{S}^{(1)}\right)_{0\leq n\leq 2}$ est donc une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

donc $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre.

(5) Un marché est viable s'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

Dans le cours on a dit que c'était équivalent à l'existence d'une probabilité risque neutre.

(On a juste montré le sens utile ici : existence de $\mathbb{P}^*$ probabilité risque neutre $\Rightarrow$ pas d'opportunité d'arbitrage.)

Le marché est donc viable.

Exercice 4 : Prenons $\varphi_1^{(0)} = -1$ et $\varphi_1^{(1)} = 1$

on a : $V_0(\varphi) = \varphi_1^{(0)} S_0^{(0)} + \varphi_1^{(1)} S_0^{(1)}$

$= -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

et $V_1(\varphi)(\omega) = \varphi_1^{(0)} S_1^{(0)} + \varphi_1^{(1)} S_1^{(1)}$

$$= \begin{cases} -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1{,}1 = 0{,}1 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1{,}2 = 0{,}2 & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

$V_1(\varphi) \geq 0$ et $V_1(\varphi)(\omega_1) > 0$.

donc φ est une stratégie d'arbitrage.