Master 1 MAS (IREF, MSS, ROAD) — Université de Bordeaux
responsable de l'épreuve: M. Bonnefont — code UE: 4TMS807EX

Examen de Chaînes de Markov

Mardi 2 mai 2016

9h00-12h00

Tous les documents ainsi que la calculatrice sont interdits.
Le barême est indicatif.

Exercice 1.

A) On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'espace $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition P donnée par,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1) Tracer le graphe associé.

2) Donner les classes invariantes.

3) Préciser si elles sont récurentes ou transientes.

4) On considère qu au temps 0, $X_0 = 1$. Donner la loi de la chaîne pour tout temps $n \geq 1$.

5) On note μ la mesure $\mu = \frac{1}{2}\delta_2 + \frac{1}{2}\delta_4$. Montrer que

$$\mu P^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \mu + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\delta_3.$$

6) En déduire la loi de la chaîne pour tout temps $n \geq 1$ si $X_0 = 2$. (On pourra commencer par regarder la loi de la chaîne au temps 1).

7) Calculer l'ensemble des mesures invariantes de la chaîne.

B) On considère maintenant que la matrice de transition est donnée par la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1) Donner les classes invariantes et préciser leur récurrence ou leur transience.

2) On note $S = \inf\{n \geq 0, X_n \in \{1,5\}\}$ et $T = \inf\{n \geq 0, X_n = 3\}$. On pose $h(x) = \mathbb{P}_x(S < +\infty)$, pour $x \in E$.

Sans calcul que valent $h(1)$, $h(3)$ et $h(5)$?

3) Calculer $\mathbb{P}_2(S < +\infty)$.

4) Calculer $\mathbb{E}_2[\min(S,T)]$.

Exercice 2. Urne d'Ehrenfest

(La chaîne d'Ehrenfest est un modèle simplifié de la théorie cinétique des gaz, visant à illustrer l'interprétation probabiliste proposée par Boltzmann du second principe de la thermodynamique.)

Soient d balles ($d \geq 2$) numérotées de 1 jusqu'à d et réparties dans deux urnes A et B. On tire "au hasard" un nombre entier i entre 1 et d et on change la balle i d'urne. Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants.

1) Justifier que $(X_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov homogène sur $\{0, 1, \ldots, d\}$ et que sa matrice de transition vérifie, pour $0 \leq k \leq d$,

$$P(k, k-1) = \frac{k}{d},\ P(k, k+1) = \frac{d-k}{d}$$

2) On considère dans cette question que $X_0 = 0$. Calculer la loi de X_1, X_2, X_3.

3) La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle irréductible? Récurrente? Apériodique?

4) Justifier que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une unique probabilité invariante.

5) On considère μ la mesure $Binomiale(d, 1/2)$. Elle est donnée par $\mu(k) = \binom{d}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^d, 0 \leq k \leq d$. Montrer que μ est une mesure reversible pour la chaîne, c'est-à-dire vérifie:

$$\mu(k)P(k, k+1) = \mu(k+1)P(k+1, k), 0 \leq k \leq d-1.$$

En déduire que μ est la probabilité invariante.

6) On fait ici l'hypothèse que d est pair et on pose $d = 2m$. Pour $0 \leq k \leq d$, on note $T_k := \inf\{n \geq 1, X_n = k\}$ le temps de retour dans l'état k. Que valent $\mathbb{E}_0[T_0]$ et $\mathbb{E}_m[T_m]$?

7) On considère la fonction $f : \{0, \ldots, d\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(k) = 2^k$. Que peut-on dire de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$?

8) Que peut-on dire pour la convergence de la loi de X_n?

9) On modifie légèrement le modèle : lorsque la balle a été extraite d'une urne suivant la procédure décrite, on tire au sort (avec des probabilités égales) l'urne dans laquelle on la replace. Donner la nouvelle matrice de transition de la chaîne.

10) Que peut-on alors dire pour la convergence de la loi de X_n? (S'il y a convergence, on précisera la loi limite.)

Exercice 3. Soit $0 < p < 1$ un réel. On note $q = 1 - p$. On considère (X_n) la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de tranistion P définie pour $k \geq 0$ par

$$P(k, k+1) = p, \text{ et } P(k, 0) = q,$$

1) Tracer le graphe associé. Donner les classes communiquantes et leur période.

2) Montrer que 0 est un état récurrent. (On pourra s'intéresser à la loi du temps de retour en 0 partant de 0.)

3) 0 est-il récurrent positif?

4) Existe-t-il une mesure de probabilité invariante? Si oui, est-elle unique?

5) Calculer la.

Exercice 4. Soit $0 < p < 1$ un réel. On note $q = 1 - p$. On considère (X_n) la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition P définie pour $k \geq 1$ par

$$P(k, k+1) = p, \text{ et } P(k, k-1) = q$$

et par

$$P(0, 0) = 1.$$

1) Tracer le graphe associé. Donner les classes communiquantes.

2) On considère ici que $X_0 = 1$. Justifier que sur un ensemble $A \subset \Omega$ de probalitité 1, pour chaque $\omega \in A$, on a nécessairement

$$\text{ou bien: } \exists n \geq 1, X_n(\omega) = 0, \text{ ou bien: } X_n(\omega) \to +\infty.$$

3) Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $H_j = \inf\{n \geq 0, X_n = j\}$ le temps d'atteinte de l'état j. Et pour $0 \leq s < 1$, on pose

$$\phi(s) = \mathbb{E}_1[s^{H_0}] = \sum_{0 \leq k < +\infty} s^k \mathbb{P}_1(H_0 = k).$$

En utilisant la propriété forte de Markov, montrer que sous $\mathbb{P}_2$ (c'est-à-dire sachant que $X_0 = 2$), H_0 s'écrit $H_0 = H_1 + \tilde{H}_0$, avec H_1 et $\tilde{H}_0$ indépendants et que de plus H_1 et $\tilde{H}_0$ ont même loi.

En déduire que

$$\mathbb{E}_2[s^{H_0}] = \phi(s)^2.$$

4) En déduire que

$$\phi(s) = \mathbb{E}_1[s^{H_0}] = ps\phi(s)^2 + qs.$$

puis que

$$\phi(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}$$

5) Montrer que

$$\phi(s) \underset{s \to 1^-}{\longrightarrow} \mathbb{P}_1(H_0 < +\infty);$$

puis que la probabilité d'absorbtion $\mathbb{P}_1(H_0 < +\infty)$ vaut 1 si $q \geq p$ et $\frac{q}{p}$ si $p < q$.

On pourra montrer que $\sqrt{1 - 4pq} = |2p - 1| = |2q - 1|$.