

MOSE 1003 2011/2012
feuille 1 : Dérivation, Intégration

Exercice 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} x \mapsto (3x^2 + 7) \ln x, & \quad x \mapsto \frac{e^x}{x^2 + 1}, & \quad x \mapsto \sqrt{x^4 + 8} \\ x \mapsto \cos(2 - x), & \quad x \mapsto \ln(7 - x^2), & \quad x \mapsto (\sin x + 3)^4. \end{aligned}$$

Exercice 2 A l'aide de la formule $\arccos(\cos(x)) = x$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Montrer que pour tout $y \in]-1, 1[$,

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Exercice 3 Calculer les limites suivantes, en utilisant la définition de la dérivée.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1},$$

Exercice 4 Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 5 Calculer $\int_0^1 x^3 dx$, $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$.

Exercice 6 Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle maximal de définition :

$$x \mapsto \cos(3x - 5) \quad x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 4}{x} \quad x \mapsto \frac{1}{x - 2}$$

Exercice 7 Supposons que $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} = \frac{9\pi}{4}$ est connue.

Soient $A = \int_0^3 (\sqrt{9 - x^2} - 3) dx$ et $B = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2} + 3} dx$. Calculer A , $A+B$ puis B

Exercice 8 Calculer $\int_0^1 e^{-x} dx$, $\int_0^1 x e^{2x} dx$, $\int_0^1 2x e^{x^2} dx$, $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 3} dx$.

Exercice 9 Calculer l'intégrale suivante (essayez de trouver une solution par intégration par parties *et* une solution par changement de variables) : $\int \frac{\log(x)}{x} dx$

Exercice 10 Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait pour tout réel x différent de -1 et 5 : $\frac{1}{x^2 - 4x - 5} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 5}$. Calculer ensuite $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x - 5} dx$.

Exercice 11 Calculer $\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 3} dx$, $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} dx$, $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)^2} dx$

Exercice 12 Trouver les primitives suivantes

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx, \quad \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx, \quad \int \sin(x) \cos(x) dx$$

Le dernier problème admet deux raisonnements différents. Les voyez-vous ?

Exercice 13 Soient $\lambda, T > 0$. Calculer $I(T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt$ et $E(T) = \int_0^T t \lambda e^{-\lambda t} dt$.
Discuter les limites de $I(T)$ et $E(T)$ quand T tend vers infini.

Exercice 14* Calculer $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$, $\int \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} dx$,