Université de Bordeaux 1, L3 Probabilités, 2012-2013

Devoir Maison 2 : A RENDRE la Semaine 15

Exercice 1. *Inégalité de Hoeffding.*

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérés sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1) Soit X une variable aléatoire réelle centrée et $\mathbf{P}$-presque sûrement ($\mathbf{P}$-ps) bornée par 1.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité suivante

$$\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t).$$

b) Après avoir justifié que la variable $\exp(tX)$ est intégrable, en déduire que

$$\mathbf{E}[\exp(tX)] \leq \frac{1}{2}(\exp(-t) + \exp(t))$$

puis que :

$$\mathbf{E}[\exp(tX)] \leq \exp(t^2/2).$$

2) On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.r indépendantes centrées et $\mathbf{P}$-ps bornées : on suppose que pour tout $n \geq 1$, il existe une constante $c_n > 0$ telle que : $\mathbf{P}(|X_n| \leq c_n) = 1$. On note : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}[\exp(tS_n)] \leq \exp\Big(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\Big).$$

b) En déduire que pour tout $t > 0$ et pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}[S_n > \epsilon] \leq \exp\Big(-t\epsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\Big).$$

c) En déduire (par exemple en minimisant le second membre) que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}[S_n > \epsilon] \leq \exp\Big(-\frac{\epsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\Big).$$

d) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}[|S_n| > \epsilon] \leq 2\exp\Big(-\frac{\epsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\Big).$$

e) On fixe $\alpha > 0$. On suppose que la suite (c_n) est telle que : $\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$ où $\beta > 0$.
Démontrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ converge $\mathbf{P}$-ps vers 0.

3) On suppose ici que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, que X_1 est centrée, $\mathbf{P}$-ps bornée par 1 et $\mathbf{P}$-ps non nulle.

a) En utilisant les résultats du 2), démontrer que pour tout $\alpha > 1/2$, la suite $\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ converge $\mathbf{P}$-ps vers 0.

b) Démontrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n^{1/2}}\right)$ ne converge pas $\mathbf{P}$-ps vers 0 : on pourra par exemple utiliser le Théorème Central Limite.

Exercice 2. Les 2 parties **A)** et **B)** suivantes sont indépendantes.

A) Soient h et ℓ deux fonctions continues sur l'intervalle fermé $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telles qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant : pour tout $x \in]0,1]$, $\quad 0 < h(x) \leq \alpha \ell(x)$.
Soit $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi qui sont à valeurs dans $[0,1]$ et d'espérance non nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(\theta_k) \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell(\theta_k).$$

a) Déterminer la limite p.s., lorsque n tend vers $+\infty$, des suites $(H_n)_{n\geq 1}$ et $(L_n)_{n\geq 1}$.

b) Déterminer la limite p.s., lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $\left(\frac{H_n}{L_n}\right)_{n\geq 1}$.

c) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^n h(x_k)}{\sum_{k=1}^n \ell(x_k)} dx_1 \ldots dx_n.$$

B) a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

b) Justifier que le résultat précédent est en fait vrai si l'on suppose simplement que la fontion f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $a > 0$. On considère une variable aléatoire réelle X de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{1}{a}\, x^{\frac{1}{a}-1}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(x).$$

a) Calculer la fonction de répartition de X.

b) Déterminer la loi de la variable $Y = -\frac{2}{a}\ln(X)$.