Université de Bordeaux, Licence 3 16/03/2016.

Probabilités DS

durée 1h30 - la calculatrice Casio collège est autorisée.
On justifiera proprement tous les calculs. Le barême est indicatif.

EXERCICE 1. (10 points) Les parties A et B sont indépendantes.

On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ est donnée par:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Partie A: (6 points) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1) Montrer que pour $t > 0$, $\mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$, puis que X vérifie la propriété d'absence de mémoire; c'est-à-dire que pour $s, t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

La loi exponentielle est souvent utilisée pour modéliser l'instant de première panne d'une machine. Dans certaines situations, il est plus réaliste de modéliser cette durée de vie par une loi de Weibull. On dit que Y suit la loi de Weibull $\mathscr{W}(a,\lambda)$ avec $a > 0$ et $\lambda > 0$ si $Y = X^{1/a}$ pour X une certaine variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

2) Soit $a \geq 1$. Montrer que pour tout $s, t \geq 0$, on a

$$(t+s)^a \geq s^a + t^a.$$

3) Soit Y une variable aléatoire de loi de Weibull $\mathscr{W}(a,\lambda)$ avec $a \geq 1$ et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $s, t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y > t + s | Y > t) \leq \mathbb{P}(Y > s).$$

On admettra que si Y suit une loi de Weibull $\mathscr{W}(a,\lambda)$ avec $0 < a \leq 1$ et $\lambda > 0$, pour tout $s, t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(Y > t + s | Y > t) \geq \mathbb{P}(Y > s).$$

4) On cherche à modéliser la durée de vie d'une machine par une loi de Weibull $\mathscr{W}(a,\lambda)$. On considère que la panne de la machine provient d'une usure mécanique. Vaut-il mieux prendre $a \geq 1$ ou $a \leq 1$?

5) Exprimer $E[Y]$ à l'aide de la fonction d'Euler définie pour $t > 0$ par:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \text{ pour } t > 0$$

et des paramètres a et λ.

Partie B: (4 points) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1) On pose $Y = 1 + [X]$ où $[X]$ désigne la partie entière de X. On rappelle que $[x]$ désigne l'unique entier tel que $[x] \leq x < [x] + 1$. Montrer que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2) On suppose ici que X suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ et Z une loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$ et que X et Z sont indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Z)$.

EXERCICE 2. (4 points) Deux joueurs s'affrontent au jeu de pile ou face. Chacun lance n fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de piles obtenu par le joueur 1 et Y celui obtenu par le joueur 2.

1) En séparant l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en deux sous-ensembles, justifier (avec une phrase) que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

2) Quelle est la loi de X? Justifier rapidement. Donner (sans démonstration) son espérance et sa variance.

3) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

EXERCICE 3. (6 points) On dispose de 3 pièces. La première est équilibrée. La deuxième a une probabilité $p_2 = 3/4$ de tomber sur pile et la troisième une probabilité $p_3 = 1/4$ de tomber sur pile.

On fait une première expérience: on choisit une pièce “au hasard” puis on lance 1 fois la pièce choisie.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir pile?

On réalise maintenant une nouvelle expérience: on choisit toujours une pièce “au hasard” puis on lance 3 fois d'affilée la pièce choisie. On observe la séquence PFP.

2) Quelle est alors la probabilité d'avoir choisi la pièce 2 pour effectuer les lancers?

3) On effectue alors un lancer supplémentaire. Quelle est la probabilité d'observer pile? Commenter le résultat par rapport à la question 1.