Corrigé DS Probabilités L3 2016

Exercice 1 : Partie A

1) Soit X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et soit $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \int_t^{+\infty} f_X(u)\,du = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u}\,du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_t^{+\infty}$$
$$= e^{-\lambda t}.$$

Soit $t \geq 0$ et $s \geq 0$.

$$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(\{X > t+s\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > t)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}$$
$$= e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

2) Soit $a \geq 1$ et $s \geq 0$ fixé.

Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(t) = (t+s)^a - t^a - s^a.$$

On a : $g(0) = s^a - s^a = 0$

et pour $t \geq 0$, g est dérivable de dérivée :

$$g'(t) = a(t+s)^{a-1} - a t^{a-1}$$

Or $a \geq 1$ et $t, s \geq 0$ donc $(t+s)^{a-1} \geq t^{a-1}$.

donc $g'(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

On en déduit que g est croissante

d'où $g(t) \geq g(0) = 0$

c'est-à-dire $(t+s)^a \geq t^a + s^a$.

3) Soit Y de loi $W(a, \lambda)$ avec $a \geq 1$ et $\lambda > 0$.

soit $t \geq 0$, $\mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{P}(X^{\frac{1}{a}} > t)$
$= \mathbb{P}(X > t^a)$
$= e^{-\lambda (t^a)}$

avec X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Soient $t, s \geq 0$,

$\mathbb{P}(Y > (t+s)) = e^{-\lambda (t+s)^a}$ pour $t, s \geq 0$

Or $(t+s)^a \geq t^a + s^a$ donc $e^{-\lambda (t+s)^a} \leq e^{-\lambda t^a} e^{-\lambda s^a}$

c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y > t+s) \leq \mathbb{P}(Y > t)\, \mathbb{P}(Y > s)$

d'où $\mathbb{P}(Y > t+s \mid Y > t) = \dfrac{\mathbb{P}(Y > t+s)}{\mathbb{P}(Y > t)} \leq \mathbb{P}(Y > s)$

4) Si la panne de la machine provient d'une usure mécanique, il vaut mieux choisir $a \geq 1$.

En effet, si la machine a déjà fonctionné pendant une durée t, il y a plus de chance que la panne survienne avant ~~l'~~ instant $t+s$ par rapport à une machine neuve avant l'instant s; c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y \leq t+s \mid Y > t) \geq \mathbb{P}(Y \leq s)$.

5) $Y \geq 0$

$E[Y] = E[X^{1/a}] = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{a}} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \underset{(y = \lambda x)}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}} e^{-y}\, dy$

$= \frac{1}{\lambda^{1/a}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

Partie B :

1) Soit X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$Y = 1 + [X]$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(1 + [X] = k) \\
&= \mathbb{P}([X] = k-1) \\
&= \mathbb{P}(k-1 \leq X < k) \\
&= \int_{k-1}^{k} f_X(u)\,du \\
&= \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda u}\,du \qquad \text{car } k-1 \geq 0 \\
&= \left[-e^{-\lambda u}\right]_{k-1}^{k} = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\
&= \left(e^{-\lambda}\right)^{(k-1)} \left(1 - e^{-\lambda}\right) \\
&= q^{k-1} p \qquad \text{avec } p = 1 - e^{-\lambda} \text{ et } q = 1 - p = e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Donc Y suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

2) Soit X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, et Z de loi $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$.

On suppose que X et Z sont indépendantes.

Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X \geq Z) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\{X \geq Z\} \cap \{Z = k\})$$

4

d'où $\mathbb{P}(X \geq Z) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(\{X \geq k\} \cap \{Z = k\})$

$= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)\, \mathbb{P}(Z = k)$ par indépendance.

$= \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda k} q^{k-1} p$ avec $q = 1-p$.

$= p e^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \left(e^{-\lambda} q\right)^{k-1}$

$= p e^{-\lambda} \sum_{\ell\geq 0} \left(e^{-\lambda} q\right)^{\ell}$

$= \dfrac{p e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda} q}$ car $|e^{-\lambda} q| < 1$

$= \dfrac{p}{e^{\lambda} - q}$.

Exercice 2 :

1) On sépare l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$ en 2 sous ensembles de même cardinal A et B. On prend par exemple A les entiers impairs et B les entiers pairs de $\{1, \dots, 2n\}$.

Pour choisir une partie à n éléments de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$, une façon de faire est de choisir un entier k entre 0 et n puis de choisir k entiers impairs inférieurs à $2n$ et de choisir $n-k$ entiers pairs inférieurs à $2n$.

On trouve donc $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

2) X peut s'écrire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec X_i la variable aléatoire correspondant au i-ème lancer : $\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient pile au } i\text{ème lancer} \\ \text{et} & \\ X_i = 0 & \text{si on obtient face au } i\text{ème lancer.} \end{cases}$

D'après les hypothèses, les variables aléatoires X_i, $1 \leq i \leq n$, sont de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendantes

donc X suit la loi Binomiale : $Bin(n, \frac{1}{2})$.

On a : $E[X] = \frac{n}{2}$ $\quad Var(X) = \frac{n}{4}$.

3) Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=k\})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}(Y=k) \quad \text{(indépendance)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$