# 1 Rappels d'algèbre matricielle - Méthode de Newton

**Exercice 1. Représentation matricielle de quelques applications linéaires.**

1. Soit $u$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Déterminer la matrice $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\{u\} = \{\alpha u, \alpha \in \mathbb{R}\}$, puis calculer les valeurs propres de $P$.
   (b) Même question pour la projection orthogonale sur l'hyperplan $\mathcal{P}$ orthogonal à $u$.
   (c) Même question pour la symétrie par rapport au plan $\mathcal{P}$. Montrer que cette matrice est orthogonale.
2. Soient $i$ et $j$ dans $\mathbb{N}$ tels que $0 < i < j$. Déterminer la matrice $T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui permute les coefficients $x_i$ et $x_j$ de tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$. Déterminer ensuite la matrice $B = TA$ pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

**Exercice 2. Écriture par colonne de produits matrice-vecteur.**

On utilise ici les notations suivantes : pour toute matrice, on note $A(:,j)$ la $j$ème colonne de $A$ et $A(i,:)$ sa $i$ème ligne.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$ : montrer que $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A(:,j)$ (combinaison linéaire des colonnes $A(:,j)$ de $A$).
2. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension du produit $A(:,j)B(j,:)$ ? Montrer que $AB = \sum_{j=1}^{n} A(:,j)B(j,:)$.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ : exprimer les produits $DA$ et $AD$ en fonction des lignes ou colonnes de $A$.

**Exercice 3. Matrice de discrétisation (exemple modèle).**

1. On considère le problème

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad 0 < x < L && (1)\\ u(0) &= u(L) = 0. && (2) \end{aligned}$$

où $f$ est une fonction donnée et où $u$ est l'inconnue. On appelle fonction propre de ce problème aux limites, associée à la valeur propre $\mu$, une fonction $v$ vérifiant

$$\begin{aligned} -v''(x) &= \mu\, v(x), \quad 0 < x < L && (3)\\ v(0) &= v(L) = 0. && (4) \end{aligned}$$

Trouver les valeurs propres et fonctions propres de ce problème.

2. On définit $U = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, \quad 1 \le i \le n \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \qquad \text{avec} \quad h = \dfrac{L}{n+1}. \end{cases}$$

qui approche le problème (1-2). Déterminer la matrice $A$ telle que $AU = F$ où $F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$. Vérifier que les éléments propres $(\lambda^{(k)}, V^{(k)})$ de la matrice $h^2 A$ sont donnés par

$$V_j^{(k)} = \sin\left(\frac{k\pi j}{n+1}\right) \quad , \quad \lambda^{(k)} = 4\,\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right).$$

Calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$. Calculer aussi $\|A\|_2$ en fonctionn des valeurs propres de $A$, en déduire son conditionnement en norme 2, ainsi que son comportement quand $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 4. Méthode de Newton.**

Le mouvement d'un pendule oscillant est régi par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \theta'(t) = \phi(t) \\ \phi'(t) = -\sin\theta(t), \end{cases} \tag{5}$$

où $\theta(t)$ est l'angle que fait le pendule avec la verticale à l'instant $t$.

1. Ecrire le schéma d'Euler implicite appliqué à ce système (on notera $y_n = \begin{pmatrix} \theta_n \\ \phi_n \end{pmatrix}$ l'approximation de la solution à l'instant $t_n = nh$).
2. Montrer que si le pas $h$ de la méthode est suffisamment petit, alors $y_{n+1}$ est bien défini par le schéma (c.-à-d. que $y_{n+1}$ existe et est unique).
3. Écrire la méthode de Newton appliquée au calcul de $y_{n+1}$ et donner explicitement la matrice du système linéaire à résoudre à chaque itération. À quelle condition cette matrice est-elle inversible ?

**Exercice 5. À propos des matrices triangulaires.**

Dans les questions 1 à 3, $A$ désigne une matrice triangulaire inférieure.

1. Quelles sont les valeurs propres de $A$ ? A quelle condition cette matrice est-elle inversible ?
2. Pour une matrice $A$ inversible de taille $n$, écrire en langage libre un algorithme de résolution de $Ax = b$. En déduire que si $b_i = 0$ pour $i < k$ et $b_k \neq 0$ alors $x_i = 0$ pour $i < k$ et $x_k \neq 0$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires inférieures est stable par produit et par inverse.
   À présent, $A$ est une matrice carrée que l'on peut écrire sous la forme $A = MN$ où $M$ et $N$ sont des matrices triangulaires respectivement inférieure et supérieure.

4. Calculer le déterminant de $A$ en fonction des éléments de $M$ et $N$.
5. Écrire un algorithme pour résoudre le système linéaire $Ax = b$.
6. Écrire un algorithme pour calculer la matrice $B = A^{-1}$.

## 2 Méthodes directes

**Exercice 6. Méthode d'élimination de Gauss, factorisation $LU$ et $LDU$.**

1. Effectuer l'élimination de Gauss sur le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire un algorithme de résolution du système linéaire $Ax = b$ par la méthode de Gauss avec pivot partiel et donner la complexité de l'algorithme.
3. Donner la factorisation $LU$ pour la matrice de l'exemple ci-dessus.
4. Retrouver l'algorithme de factorisation LU pour une matrice quelconque.
5. Soit $A$ une matrice tridiagonale. Cosntruire l'algorithme de factorisation LU de $A$ et les algorithmes de descente-remontée tirant parti du creux de cette matrice. (On pourra utiliser une structure de données définie par exemple par $a_{i,i-1} = a_i,\ a_{i,i} = b_i,\ a_{i,i+1} = c_i$). Donner la complexité de cet algorithme.

**Exercice 7. Factorisation de Choleski, systèmes creux**

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice carré $A$ suivante

$$\begin{cases} a_{i,i} = \alpha, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ a_{n,1} = a_{1,n} = -1, \\ \text{tous les autres coefficients étant nuls.} \end{cases}$$

**1)** Montrer que pour $\alpha > 2$, la matrice $A$ est définie positive. Dans la suite de l'exercice, on supposera que $\alpha > 2$.

**2)** On factorise $A$ sous la forme $A = LDL^T$ où $L$ est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à 1 et $D$ est diagonale. Indiquer les coefficients de $L$ qui sont nuls.

**3)** Proposer une structure de données à au plus $3n$ éléments permettant de stocker $A$ puis $L$ et $D$ à la même place, et écrire l'algorithme de factorisation ainsi que les algorithmes de résolution d'un système du type $Ax = b$. Indiquer le nombre d'opérations flottantes que nécessite chacun de ces algorithmes.

**Exercice 8. Discrétisation du laplacien en dimension 2 et méthode de Choleski.**

**1)** Le problème continu : Soient $D = [0,1] \times [0,1]$ et $\partial D$ le bord de $D$. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \quad \text{pour } (x,y) \in D, \\ u = 0 \quad \text{pour } (x,y) \in \partial D. \end{cases}$$

Vérifier que $u_{p,q}(x,y) = \sin(p\pi x)\sin(q\pi y)$ et $\lambda_{p,q} = (p^2 + q^2)\pi^2$ ($p$ et $q$ entiers), sont fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions aux limites de Dirichlet.

**2)** Le problème discret : Pour $l \in \mathbb{N}$, notons $h = \Delta x = \Delta y = 1/(l+1)$. On considère la famille $(u_{i,j})$, $0 \leq i, j \leq l+1$ définie par

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + \dfrac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq l \\ u_{i,0} = u_{i,l+1} = u_{0,j} = u_{l+1,j} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq l+1 \end{cases}$$

**a)** On définit le vecteur $U = (U_m) \in \mathbb{R}^n$ $(n = l^2)$ par $U_{i+(j-1)l} = u_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq l$. Pour $l = 5$ écrire le système sous la forme $AU = F$. Montrer que la matrice $A$ ainsi obtenue est symétrique définie positive. Calculer son conditionnement en norme $||.||_2$ .

**b)** On considère la matrice A associée au maillage de gauche (figure 1). Evaluer sur le graphe de $A$ la taille de son profil. On renumérote ce graphe par l'algorithme de Cuthill-MacKee (figure de droite). Evaluer la taille du profil avec cette nouvelle numérotation. Etendre le principe pour un $l$ quelconque, évaluer la taille du profil et le nombre d'opérations pour la factorisation en fonction de $l$ (ou $n = l^2$).

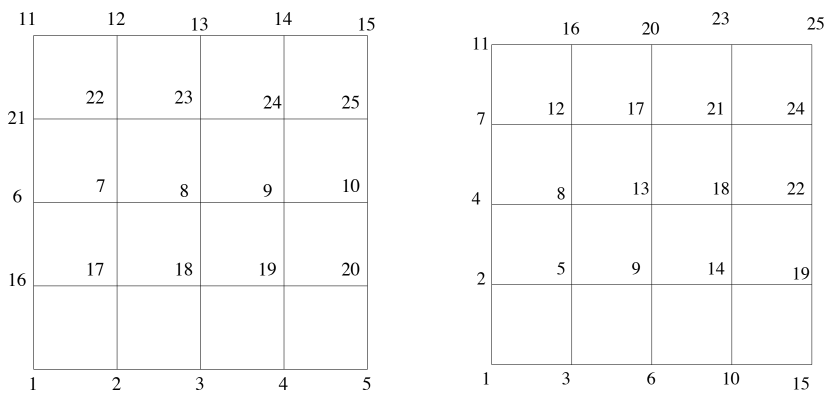


FIGURE 1 –

## 3 Méthodes itératives

**Exercice 9. Méthode itérative : un exemple.**

Soit $A$ une matrice $n \times n$ régulière dont la diagonale $D$ est inversible. Pour $b \in \mathbb{R}^n$, on veut résoudre le système $Ax = b$. Soit $\alpha \neq 0$, on étudie la la méthode itérative

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ x_{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b. \end{cases}$$

**1)** Montrer que si la suite $\{x_k\}_k$ converge la limite est solution du système $Ax = b$.

**2)** Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de ceux de la matrice $A$.

**3)** On suppose que $A$ est à diagonale strictement dominante et que $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la méthode est bien définie et que $\|I - \alpha D^{-1}A\|_\infty < 1$. En déduire la convergence de la méthode.

**Exercice 10. Méthode de Richardson.**

Soit $A$ une matrice symétrique définie positive. On considère la méthode itérative suivante

$$x_{k+1} = x_k + \alpha r_k \quad \text{avec} \quad r_k = b - Ax_k.$$

**1)** Montrer que pour $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{max}(A)}$, la méthode est convergente.

**2)** Trouver le meilleur choix de $\alpha$, celui qui minimise $\rho(I - \alpha A)$, et montrer que $\rho(I - \alpha_{\text{opt}}A) = \dfrac{\text{cond}_2(A) - 1}{\text{cond}_2(A) + 1}$.

**3)** Interpréter cet algorithme comme une méthode de gradient.

**Exercice 11. Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.**

On considère la matrice tridiagonale $A$ définie par :

$$\begin{cases} a_{ii} = i + 1, & i = 1, ..., n \\ a_{i+1,i} = -1, & i = 1, ..., n-1 \\ a_{i,i+1} = -i, & i = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

**1)** Calculer la matrice $J$ d'itération de Jacobi de $A$. Prouver que son rayon spectral est strictement inférieur à 1.

**2)** Calculer la matrice $G$ d'itération de Gauss-seidel de $A$. Soit $P_G = det(\lambda\, I_d - G)$. Montrer alors que

$$P_G(\lambda) = \lambda^n \text{det}\left(I - L - \frac{1}{\lambda}U\right),$$

et que si $|\lambda| \geq 1$ alors $P_G(\lambda) \neq 0$. En déduire que la méthode est convergente.

**3)** Décrire l'algorithme de la méthode de Gauss-Seidel appliqué à cet exemple.

**Exercice 12. Méthode du gradient à pas optimal.**

Soit le système SDP $Ax = b$ de solution $\bar{x}$

1. Retrouver l'algorithme du gradient à pas optimal pour ce système.
2. Appliquer à la main cet algorithme au système

$$\begin{cases} 2x - 4 - y = 0 \\ -1 + 2y - x = 0. \end{cases},$$

   en prenant pour donnée initiale le vecteur $x_0 = \binom{2}{1}$

3. Pour comprendre ce résultat, montrer que pour tous les systèmes SDP, l'algorithme du gradient à pas optimal converge en une seule itération lorsque $r_0$ est vecteur propre de $A$.

# 4 Problèmes de moindres carrés

**Exercice 13. Droite des moindres carrés.**

On dispose de $m$ points $(t_i, u_i)_{i=1}^m$, et l'on cherche les coefficients de la droite d'équation $u = \alpha t + \beta$ qui passe au plus près des $n$ points *au sens des moindres carrés.*

**1)** Ecrire le problème mathématique dont $\alpha$ et $\beta$ sont solutions, puis l'écrire sous forme matricielle.

**2)** A quelle condition sur les $m$ points ce problème admet-il une unique solution ?

**3)** Calculer cette solution.

**4)** Réécrire la solution à l'aide des quantités statistiques $\bar{t} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m t_i$, $\bar{u} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m u_i$, $\sigma(t_i, u_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (t_i - \bar{t})(u_i - \bar{u})$, et $\sigma(t_i) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (\bar{t} - t_i)^2$, et en déduire que que la droite passe par le point moyen $(\bar{t}, \bar{u})$.

**Exercice 14. Application à l'halieutique.**

En halieutique, on procède souvent à l'estimation de la masse d'une population de poissons. Pour cela, on suppose qu'il existe une relation entre la longueur $L$ et la masse $M$ de tout poisson, et l'on suppose en général que cette relation est du type $M = \alpha L^\beta$, où les coefficients $\alpha$ et $\beta$ doivent être déterminés pour la population considérée. Ensuite, on effectue des mesures de masses et de longeurs d'un certain nombre d'individus. Supposons que, lors d'une pêche, on ait obtenu les 24 mesures suivantes de masse (en $g$) et de longueur (en $mm$) :

$L = (64, 74, 90, 99, 109, 125, 128, 135, 150, 165, 170, 181, 195, 199, 210, 214, 230, 237, 248, 265, 263, 271, 286, 303)$

$M = (8, 10, 17, 22, 28, 37, 46, 56, 71, 84, 102, 119, 140, 162, 185, 212, 242, 272, 307, 344, 382, 424, 469, 516)$

Par la méthode des moindres carrés, déterminer les paramètres de la relation longueur/masse.

**Exercice 15. Approximation de fonctions.**

Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ sur $[-5, 5]$ aux points $t_i = -5 + 0.2i$ pour $i$ de 0 à 50. Tracer $f$ et ce polynôme sur $[-5, 5]$. Quel phénomène constate-t'on ? Quelle méthode vue dans le cours permet de calculer un polynôme de degré moins elevé (disons 10) donnant une autre approximation de $f$ en utilisant toujours les 50 valeurs $(t_i, f(t_i))$ ? Calculer alors ce polynôme et le tracer sur le graphe précédent. Comparer les deux approximations obtenues.

# 5 Problèmes de valeurs propres

**Exercice 16. Valeurs propres : variante de la puissance itérée.**

Considérons une variante de l'algorithme de la puissance itérée, basée sur autre normalisation :

$$y_k := Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{y_k}{\alpha_k},$$

où $\alpha_k$ est la plus grande composante en module de $y_k$. Démontrer que sous les mêmes hypothèses que celles du théorème, $\alpha_k$ converge vers $\lambda_1$ **et** $x_k$ converge vers un vecteur propre associé.

**Exercice 17. Puissance itérée : matrices symétriques.**

Montrer que si $A$ est une matrice réelle symétrique dans l'algorithme de la puissance itérée, alors le facteur de convergence de $\lambda^{(k)}$ est $|\lambda_2/\lambda_1|^{2k}$.