TROU SPECTRAL LOCAL POUR DES ACTIONS DE TRANSLATIONS

par

Rémi Boutonnet

Résumé. — Le but de ce texte est de présenter une notion, appelée *trou spectral local*, qui porte sur une action de groupe sur un espace mesuré, et qui implique que l'action est ergodique en un sens fort. Cette notion est reliée au comportement de certaines marches aléatoires associées à l'action et au problème de Banach-Ruziewicz. Je vais expliciter ces liens et donner des exemples concrets d'actions vérifiant cette condition de trou spectral local. La première moitié de ce texte présentera les principaux résultats, exemples et applications alors que la deuxième moitié donnera une preuve plus détaillée de l'un des résultats. Les résultats présentés sont obtenus en collaboration avec A. Ioana et A. Salehi-Golsefidi.

1. Le cadre général

Dans tout ce texte, on s'intéressera à une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ d'un groupe Γ (discret, dénombrable) sur un espace mesuré (X, μ), avec l'hypothèse que la mesure μ est invariante. Donnons tout de suite les exemples qui vont nous intéresser:

(1) Pour $d \geq 1$, n'importe quel groupe d'isométries Γ de la sphère $\mathbb{S}^d$ (ou de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$) préserve la mesure de Lebesgue.
(2) Plus généralement, si G est un groupe localement compact et Γ est un sous-groupe dénombrable, alors l'action de translation à gauche de Γ sur G préserve la mesure de Haar[(1)].

Une telle action est dite *ergodique* si les seuls sous-ensembles mesurables $Y \subset X$ qui sont globalement Γ-invariants sont nuls ou co-nuls: $\mu(Y) = 0$ ou $\mu(X \setminus Y) = 0$. Dans l'exemple (2) ci-dessus, l'action est ergodique si et seulement si Γ est dense dans G.

Le concept de trou spectral local qui nous intéresse est relié à un renforcement de la notion d'ergodicité, introduit par Schmidt.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22D40 [22E30, 22E46, 22F10, 28D05].
Mots clefs. — Trou spectral, groupes localement compacts, problème de Banach-Ruziewicz, ergodicité forte.

(1) L'exemple (1) correspond en fait à une action de translation sur un espace homogène $\Gamma \curvearrowright G/H$.

***Définition 1* ([Sch80]).** — L'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est *fortement ergodique* s'il existe une mesure de probabilité ν équivalente à μ (au sens où μ et ν ont les mêmes ensembles de mesure nulle) vérifiant la condition suivante. Toute suite $(A_n)_n$ d'ensembles mesurables de X presque-invariants est triviale :

$$\left(\lim_n \nu(A_n \Delta g A_n) = 0, \text{ pour tout } g \in \Gamma\right) \Rightarrow \lim_n \nu(A_n)(1 - \nu(A_n)) = 0.$$

Ici Δ désigne la différence symétrique.

En fait on observe que si ν est une mesure de probabilité sur X équivalente à μ, alors pour toute suite $(X_n)_n$ d'ensembles mesurables dans X, $\lim_n \nu(X_n) = 0$ si et seulement si $\lim_n \mu(X_n \cap B) = 0$ pour tous les ensembles $B \subset X$ de mesure μ finie. Donc la définition ci-dessus ne dépend pas du choix de ν et peut s'exprimer uniquement en faisant intervenir μ.

Le résultat suivant dû à Ioana présente une application remarquable de cette notion d'ergodicité forte.

***Théorème 2* ([Ioa17]).** — *Considérons deux groupes localement compacts G et H, connexes et simplement connexes et deux sous-groupes denses $\Gamma < G$ et $\Lambda < H$. Supposons que l'action de translation $\Gamma \curvearrowright G$ est fortement ergodique.*

S'il existe une bijection bi-mesurable $\phi : G \to H$ telle que $\phi(\Gamma g) = \Lambda\phi(g)$ pour presque-tout $g \in G$, alors il existe un isomorphisme continu $\theta : G \to H$ tel que $\theta(\Gamma) = \Lambda$.

En d'autres termes, la seule structure mesurable des orbites de l'action $\Gamma \curvearrowright G$ permet de retrouver toute la structure algébrique du plongement $\Gamma < G$, dès lors que l'action est fortement ergodique. On parle de "rigidité mesurable". Mais comment vérifier cette condition en pratique ? Nous allons voir que la condition de *trou spectral local* qui fait l'objet de ce texte implique l'ergodicité forte (entre autres), et qu'elle est de nature plus analytique, ce qui donne accès à beaucoup d'outils pour la vérifier.

Cette notion est reliée à la *représentation de Koopman* associée à l'action. Par définition c'est la représentation de Γ sur l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$ obtenue par pré-composition: $\sigma_g(F)(x) = F(g^{-1}x)$, pour tout $F \in L^2(X, \mu)$, $g \in \Gamma$. Comme la mesure μ est invariante, cette représentation est unitaire. Dans le cas où $\mu(X)$ est finie, on notera $L^2_0(X, \mu)$ le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle.

Commençons par rappeler la notion usuelle de trou spectral, valable dans le cas où la mesure invariante est finie. Nous mentionnons aussi quelques faits connus que nous comparerons plus tard au cas où la mesure est infinie.

2. Cas fini ; le trou spectral

Supposons ici que la mesure invariante μ est de masse totale finie : $\mu(X) < \infty$. Dans ce cas, les fonctions constantes sur X appartiennent à l'espace $L^2(X, \mu)$. Dire que l'action est ergodique revient à dire que toute fonction σ-invariante dans $L^2(X, \mu)$ est constante. Le trou spectral renforce cette idée en disant qu'une fonction qui est presque invariante est presque constante. Quantitativement :

Définition 3. — L'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ a un *trou spectral* s'il existe un ensemble fini $S \subset \Gamma$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\|F - \int_X F d\mu\|_2 \leq C \sum_{g\in S} \|F - \sigma_g(F)\|_2, \text{ pour tout } F \in L^2(X,\mu). \tag{2.1}$$

Remarque 4. — Une action avec un trou spectral est fortement ergodique. En effet pour tout ensemble mesurable $A \subset X$, la condition de trou spectral appliquée à la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ s'écrit

$$\big(\mu(A) - \mu(A)^2\big)^{1/2} \leq C \sum_{g\in S} \mu(A\Delta gA)^{1/2}.$$

L'ergodicité forte suit clairement de cette inégalité. La réciproque est fausse ; il existe des actions fortement ergodiques qui n'ont pas un trou spectral [**Sch81**].

La notion de trou spectral est fondamentale, et son champ d'applications ne se résume pas à l'ergodicité forte ; donnons quelques applications supplémentaires.

Premièrement, le trou spectral est relié aux marches aléatoires sur X et leur équi-répartition. Supposons que Γ est engendré par un ensemble symétrique fini S. Étant donnée l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, la marche aléatoire $(x_n)_{n\geq 0}$ que nous considérons part d'un point $x_0 \in X$ arbitraire, et le passage de x_n à x_{n+1} est obtenu en appliquant de manière équiprobable un élément de S. Notons $\nu_S \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ la mesure uniforme sur l'ensemble S. Deux phénomènes d'équi-répartition peuvent être étudiés :

a) on peut regarder la distribution de x_n et la comparer à la mesure μ,
b) on peut également observer la trajectoire $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pour une réalisation de la marche, et se demander si génériquement cette trajectoire forme un ensemble équi-distribué sur X.

Pour ces deux questions, l'hypothèse d'ergodicité suffit souvent à conclure l'équi-répartition. Le trou spectral permet de déterminer une vitesse de convergence.

Par exemple dans le scénario a), la loi μ_n de x_n est la convolée $\nu_S^{*n} * \mu_0$, où μ_0 est la loi de x_0 (par exemple un Dirac). Dans le cas des actions de translation $\Gamma \curvearrowright G$, un résultat de Itô et Kawada [**KI40**] assure que μ_n converge faiblement vers la mesure de Haar de G dès que Γ est dense dans G et $e \in S$. Le calcul simple qui suit montre que sous l'hypothèse de trou spectral l'équi-répartition se fait exponentiellement vite, en un certain sens. Notons tout d'abord que si l'action a un trou spectral alors, dans l'estimée (2.1), on peut choisir pour S n'importe quel ensemble fini qui engendre Γ (quitte à changer la constante C). On considère l'opérateur de moyenne $T_S := (\sum_{s\in S} \sigma_s)/|S|$ sur $L^2(X,\mu)$. L'inégalité (2.1) implique, pour $F \in L^2_0(X,\mu)$,

$$\|F\|_2^2 \leq C^2|S| \sum_{g\in S} \|F - \sigma_g(F)\|_2^2 = 2C^2|S|^2(\|F\|_2^2 - \langle T_S F, F\rangle). \tag{2.2}$$

Ce calcul montre que l'opérateur auto-adjoint T_S a une norme c strictement inférieure à 1 sur $L^2_0(X,\mu)$. Ainsi comme opérateur sur $L^2(X,\mu)$, la valeur propre 1 de T_S est isolée, d'où l'appellation de trou spectral. Cela implique notamment l'inégalité d'équi-répartition de la marche aléatoire x_n :

$$\int_X \left| \mathbb{E}(F(x_n) \,|\, x_0) - \int_X F d\mu \right|^2 d\mu(x_0) = \|T_S^n(F - \int_X F d\mu)\|_2^2 \leq c^{2n} \|F - \int_X F d\mu\|_2^2,$$

pour tout $F \in L^2(X,\mu)$.

Dans le scénario b), Kakutani [**Kak51**] a montré que l'ergodicité implique toujours l'équi-répartition, tandis que Furman et Shalom donnent des vitesses de convergence sous l'hypothèse de trou spectral [**FS99**]. Voici des énoncés précis.

Théorème 5 **([Kak51, FS99]).** — *Supposons que S engendre Γ et notons $(x_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur X décrite ci-dessus.*

1. *Si l'action est ergodique alors pour toute fonction $F \in L^1(X,\mu)$, pour μ-presque tout point de départ x_0 et presque toute réalisation de la marche, on a*
$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n F(x_i) = \int_X F d\mu.$$
2. *Si de plus l'action a un trou spectral, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $F \in L^2(X,\mu)$, pour μ-presque tout point de départ x_0 et presque toute réalisation de la marche, on a*
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n F(x_i) - \int_X F d\mu\right| = o\left(\frac{\log^{1/2+\varepsilon} n}{\sqrt{n}}\right).$$

Furman et Shalom montrent également un énoncé dans l'esprit du Théorème central limite. Le résultat d'équi-distribution est une application directe du Théorème ergodique de Birkhoff. Le deuxième énoncé estimant la vitesse repose aussi sur une inégalité maximale.

Deuxièmement, la propriété de trou spectral d'une action profinie est reliée aux graphes expanseurs. Plus précisément, supposons que Γ est résiduellement fini et considérons une suite décroissante de sous-groupes normaux d'indice fini $\Gamma_n < \Gamma$ d'intersection triviale et notons X la limite profinie des quotients Γ/Γ_n. Alors l'action profinie associée $\Gamma \curvearrowright X$ a un trou spectral si et seulement s'il existe un ensemble générateur fini $S \subset \Gamma$ tel que les graphes de Schreier $\mathrm{Sch}(\Gamma/\Gamma_n, S)$ sont des graphes expanseurs. On renvoie au livre de Lubotzky [**Lub94**] pour la définition des graphes expanseurs et leurs applications.

Troisièmement, le trou spectral est relié à l'unicité des moyennes invariantes par l'action. Voici un énoncé précis. Là encore, le lecteur pourra consulter [**Lub94**] pour plus de détails.

Théorème 6. — *Une action sur un espace de probabilité $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ a un trou spectral si et seulement si $F \mapsto \int_X F d\mu$ est la seule forme linéaire positive Γ-invariante sur $L^\infty(X,\mu)$, à multiplication scalaire près.*

Dans le cas particulier d'une action de translation $\Gamma \curvearrowright (G,\mu)$, où Γ est un sous groupe dense d'un groupe compact G, dont la mesure de Haar est noté μ, la condition de trou spectral équivaut à dire que μ est la seule moyenne sur G (i.e. mesure de probabilité finiment additive) qui soit Γ-invariante et définie sur tous les ensembles Haar-mesurables.

Éléments de démonstration. — La première assertion repose sur de l'analyse fonctionnelle et est due à Rosenblatt [**Ros81**]. Tout d'abord supposons que l'action ait un trou spectral. Si $\Phi : L^\infty(X,\mu) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire positive Γ-invariante, elle peut être approximée pour la topologie pré-faible par une suite (généralisée) de fonctions $f_n \in L^1(X,\mu)$. Autrement dit $\Phi(F) = \lim_n \int_X f_n F d\mu$. Comme Φ est Γ-invariante, on déduit que $f_n - g \cdot f_n$ tend faiblement vers 0 pour tout $g \in \Gamma$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on peut en fait supposer que $\|f_n - g \cdot f_n\|_1$ tend vers 0, quitte à prendre des combinaisons convexes des f_n. Mais alors les fonctions $\sqrt{f_n}$ sont presque invariantes dans $L^2(X, \mu)$ et l'hypothèse de trou spectral implique qu'elles sont presque constantes. C'est aussi le cas des fonctions f_n. On vérifie alors que leur limite pré-faible Φ est un multiple de la mesure de Haar.

L'idée de la réciproque est la suivante. Si l'action n'a pas un trou spectral on peut trouver une suite de fonctions $f_n \in L^2(X, \mu)$ d'intégrale nulle telles que $\|f_n\|_2 = 1$ pour tout n et $\lim_n \|f_n - \sigma_g(f_n)\|_2 = 0$ pour tout $g \in \Gamma$. On peut alors définir une forme linéaire positive $\Phi : F \mapsto \lim_n \int_X |f_n|^2 F d\mu$, (où $\lim_n$ désigne une forme linéaire positive sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui étend la limite usuelle). On vérifie que Φ est Γ-invariante. Pour conclure il reste à vérifier que Φ ainsi obtenue n'est pas l'intégration par rapport à la mesure μ. Cela n'est pas clair sous la seule hypothèse que les f_n sont d'intégrale nulle. En pratique, on modifie au préalable les fonctions f_n pour s'assurer qu'elles sont supportées sur des ensembles X_n de plus en plus petits, par exemple $\mu(X_n) \leq 1/2^{n+1}$. Cela implique que l'ensemble $A := \bigcup_{n \geq 1} X_n$ vérifie $\Phi(\mathbf{1}_A) = 1$ alors que $\mu(A) \leq 1/2$, ce qui montre que Φ n'est pas l'intégration par rapport à μ. La mise en oeuvre de cette idée est délicate ; on renvoie à [**Ros81**] pour les détails techniques.

Expliquons maintenant comment la deuxième assertion découle de la première. Supposons d'abord que la mesure de Haar est la seule moyenne Γ-invariante sur G. Prenons une forme linéaire positive Φ sur $L^\infty(G, \mu)$ qui est Γ-invariante. Quitte à la renormaliser on peut supposer que $\Phi(\mathbf{1}_G) = 1$, de sorte que l'application $A \mapsto \Phi(\mathbf{1}_A)$, définie pour tout sous-ensemble Haar-mesurable $A \subset G$, est une moyenne Γ-invariante sur G. Elle coincide donc avec la mesure de Haar, ce qui implique que Φ est la forme linéaire $F \mapsto \int_G F d\mu$. Nous déduisons alors de la première assertion que l'action a un trou spectral.

La réciproque repose sur des arguments de décomposition paradoxale à la Tarski. Supposons que l'action a un trou spectral et considérons une moyenne ν sur G qui est Γ-invariante et définie sur les ensembles Haar-mesurables. Nous voulons prouver que ν est la mesure de Haar. Si G est fini (et donc $\Gamma = G$), il est évident que ν est la mesure de comptage. On suppose donc que G est infini, et donc que sa mesure de Haar n'a pas d'atome. Le fait que l'action a un trou spectral implique alors que Γ est non-moyennable [**dJR79**]. En adaptant la preuve de [**Lub94**, Theorem 2.1.17] on déduit alors que deux ensembles $A, B \subset G$ d'intérieur non-vide sont toujours Γ-équidécomposables, au sens où on peut trouver une partition finie $A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$ et des éléments $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$ tels que $(g_1 A_1, \ldots, g_k A_k)$ forme une partition de B. On peut alors reproduire la preuve de [**Lub94**, Proposition 2.2.12] pour conclure que ν est absolument continue par rapport à μ, au sens où $\nu(A) = 0$ pour tout sous ensemble tel que $\mu(A) = 0$. Ainsi l'application $\mathbf{1}_A \in L^\infty(G, \mu) \mapsto \nu(A)$ est bien définie et s'étend en une forme linéaire positive Γ-invariante sur l'ensemble des fonctions étagées sur G, que l'on peut prolonger par continuité à $L^\infty(G, \mu)$. On conclut alors grâce à la première partie du théorème. □

Le résultat précédent a été un ingrédient clé dans la réponse au problème de Banach-Ruziewicz obtenue par Margulis [**Mar80**], Sullivan [**Sul81**] et Drinfeld [**Dri84**]. Ce problème, posé à Banach par Ruziewicz, demandait si la mesure de Lebesgue sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ et sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ était la seule mesure finiment additive invariante par isométries.

En 1923, Banach rapporte cette question de Ruziewicz et démontre que pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ (et aussi le cercle $\mathbb{S}^1$), ce n'est pas le cas [**Ban23**]. Il laisse le problème ouvert dans les autres cas. Il faudra attendre presque 60 ans pour que les travaux de Schmidt [**Sch80**] et Rosenblatt [**Ros81**] permettent de démontrer le Théorème 6, offrant une stratégie pour montrer que dans les cas de $\mathbb{S}^{d-1}$, $d \geq 3$, la mesure de Lebesgue est bien la seule moyenne invariante par isométries. Les travaux de Margulis, Sullivan et Drinfeld ont ainsi consisté à trouver un sous-groupe de $\mathrm{SO}(d)$ qui agisse sur la sphère avec un trou spectral. Margulis et Sullivan ont réussi (indépendamment) dans le cas où $d \geq 5$ en utilisant la propriété (T) de Kazhdan, puis Drinfeld est parvenu à traiter les cas $d = 3$ et $d = 4$ correspondant à $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^3$ respectivement.

Aujourd'hui beaucoup d'autres résultats de trou spectral ont été démontrés. En voici l'un des points culminants.

Théorème 7 **(Bourgain-Gamburd [BG08, BG12], Benoist-de Saxcé [BdS16b])**
Soit G un groupe de Lie compact connexe simple et $\Gamma < G$ un sous-groupe dense. Notons Ad *la représentation adjointe de G sur son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ et supposons qu'il existe une base de $\mathfrak{G}$ dans laquelle les éléments* $\mathrm{Ad}(g)$, *$g \in \Gamma$ ont des coefficients qui sont des nombres algébriques.*

Alors l'action de translation $\Gamma \curvearrowright G$ a un trou spectral.

On renvoie à [**BL18**] pour un panorama des techniques utilisées et autres résultats. On conjecture que tout sous groupe dénombrable dense de $\mathrm{SO}(d)$ agit sur $\mathrm{SO}(d)$ (et donc aussi sur la sphère) avec un trou spectral.

Concernant le problème de Banach-Ruziewicz sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, Margulis a résolu le problème en généralisant l'idée du trou spectral [**Mar82**]. C'est ce qui a motivé la définition du trou spectral local qui suit.

3. Cas général : le trou spectral local

Avant de définir le trou spectral local, observons déjà une différence avec le cas fini concernant l'ergodicité. Comme évoqué plus haut, dans le cas fini, l'action est ergodique si et seulement si toute fonction Γ-invariante $F \in L^2(X, \mu)$ est constante. En revanche, dans le cas où la mesure est infinie il n'y a pas de tel critère d'ergodicié faisant uniquement intervenir la représentation de Koopman. En effet il peut exister des ensembles invariants de mesure infinie (et dont le complémentaire est de mesure infinie). La fonction indicatrice d'un tel ensemble n'est pas de carré intégrable.

Pour définir la notion de trou spectral local, nous allons considérer une *fenêtre finie*, i.e. un ensemble $B \subset X$ de mesure finie (et non-nulle). On notera alors $\|F\|_{2,B} := (\int_B |f|^2 d\mu)^{1/2}$, pour tout $F \in L^2(X, \mu)$.

Définition 8. — Fixons $B \subset X$ tel que $0 < \mu(B) < \infty$. L'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ a un *trou spectral local*, par rapport à B, s'il existe un ensemble fini $S \subset \Gamma$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\|F - \frac{1}{\mu(B)} \int_B F d\mu\|_{2,B} \leq C \sum_{g \in S} \|F - \sigma_g(F)\|_{2,B}, \text{ pour tout } F \in L^2(X, \mu). \tag{3.1}$$

Qualitativement, cette inégalité dit que toute fonction presque invariante dans la fenêtre B est presque constante sur B. On vérifie que si $\Gamma \cdot B = X$ alors cette propriété implique l'ergodicité.

Concernant le choix de la fenêtre B, on vérifie que si $B, B' \subset X$, sont deux ensembles de mesure finie non-nulle tels qu'il existe un ensemble fini $S \subset \Gamma$ vérifiant $B \subset S \cdot B'$ et $B' \subset S \cdot B$, alors le trou spectral local par rapport à B équivaut au trou spectral local par rapport à B'.

Attention cependant, le choix de B a son importance en général. Par exemple si X est de mesure finie et $B = X$, on retrouve la définition du trou spectral. En revanche Marrakchi a montré le résultat suivant qui dit que si on ne spécifie pas le choix de B on retrouve l'ergodicité forte. Mais ces notions ne sont pas équivalentes en général, [**Sch81**].

Théorème 9 **([Mar18]).** — *L'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est fortement ergodique si et seulement s'il existe $B \subset X$ de mesure finie non-nulle telle que l'action ait un trou spectral local par rapport à B.*

Dans les cas qui nous intéressent, l'action $\Gamma \curvearrowright X$ vérifie des hypothèses supplémentaires:

Hypothèse 10. — X est un espace topologique localement compact, le groupe agit par homéomorphismes et la mesure est une mesure de Radon telle que tout ouvert de X est de mesure non-nulle.

Sous ces hypothèses, et si de plus l'action est ergodique, on voit que pour toute paire de sous ensembles B, B' relativement compacts, d'intérieur non-vide, il existe $S \subset \Gamma$ fini tel que $B \subset S \cdot B'$ et $B' \subset S \cdot B$. Dans ces cas *nous parlerons de trou spectral local pour désigner la notion de trou spectral local par rapport à n'importe quel sous-ensemble relativement compact, d'intérieur non-vide.*

3.1. Applications. — Comme le trou spectral usuel, cette version locale admet un certain nombre de conséquences.

Rigidité sous équivalence orbitale. — Comme première application du trou spectral local, nous avons mentionné plus haut le résultat de Marrakchi qui relie trou spectral local et ergodicité forte. Le fait que le trou spectral local implique l'ergodicité forte est facile à vérifier, et montre que toute action de translation $\Gamma \curvearrowright G$ avec un trou spectral local vérifie le théorème de rigidité de Ioana mentionné plus haut.

Unicité de la mesure finiment additive invariante. — Dans [**BISG17**], nous montrons le résultat suivant pour des actions de translation.

Théorème 11 **([BISG17], Theorem 7.1).** — *Soient G un groupe localement compact séparable et $\Gamma < G$ un sous-groupe dénombrable dense. Notons μ une mesure de Haar sur G. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'action de translation $\Gamma \curvearrowright (G, \mu)$ a un trou spectral local ;
(ii) L'action est fortement ergodique ;
(iii) $F \mapsto \int_G F d\mu$ est la seule forme linéaire positive Γ-invariante (à multiplication scalaire près) sur l'algèbre $L^\infty_c(G, \mu)$ des fonctions mesurables bornées à support compact sur G.

(iv) *La mesure de Haar est, à multiplication scalaire près, la seule mesure finiment additive* Γ*-invariante définie sur la tribu des ensembles Haar-mesurables relativement compacts.*

Ce résultat généralise des résultats analogues dans le cas où G est compact. D'une part, l'équivalence entre (i), (iii) et (iv) généralise le Théorème 6 ci-dessus et la preuve suit globalement les mêmes idées, bien que certains détails techniques requièrent plus de travail. Notamment pour déduire (iv) de (iii) il faut à nouveau montrer un résultat de continuité absolue par rapport à μ. Notre argument requiert de trouver un sous groupe libre non-discret dans Γ, et repose donc sur la structure des groupes localement compacts et l'alternative de Tits de Breuillard et Gelander [**BG07**].

L'équivalence entre (i) et (ii) dans le cas où G est compact est un résultat dû à Abert et Élek [**AE12**, Theorem 4]. Leur preuve repose sur le fait que l'action à droite de G sur lui-même commute avec l'action à gauche $\Gamma \curvearrowright G$. Cet ingrédient est toujours valable dans le cas non-compact, et nous parvenons à étendre leur preuve dans le cas général.

Marches aléatoires. — Mentionnons ici une non-application. Comme nous l'avons vu plus haut, dans le cas fini le trou spectral usuel implique des propriétés d'équidistribution de certaines marche aléatoires. Les choses ne sont pas aussi claires dans le cas du trou spectral local. Tout d'abord on ne sait pas prescrire les générateurs qui définissent la marche aléatoire :

Question 12. — Si une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ satisfait la condition de trou spectral local (3.1) et si $T \subset \Gamma$ est un ensemble fini engendrant le groupe Γ, est-ce que cette condition (3.1) est aussi satisfaite avec $S = T$, quitte à modifier la constante C ?

La deuxième obstruction concernant l'étude d'une marche aléatoire tient au fait que la fenêtre finie qu'on regarde n'est pas Γ-invariante. Plus précisément, la condition (3.1) ne donne pas directement d'information sur l'opérateur de moyenne $T_S = \frac{1}{|S|}\sum_{g\in S}\sigma_g$ mais plutôt sur l'opérateur $1_B T_S$. En effet un calcul similaire à celui fait en (2.2) conduit à l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$2\Re(\langle F, 1_B T_S(F)\rangle) \leq (1-c)\|F\|_{2,B}^2 + \frac{1}{|S|}\sum_{g\in S}\|\sigma_g(F)\|_{2,B}^2,$$

pour tout $F \in L^2(G)$ telle que $\int_B F d\mu = 0$. Noter que le terme de droite peut être majoré grossièrement par $(2-c)\|F\|_2^2$. Une telle condition semble difficilement exploitable. Nous parvenons néanmoins dans certains cas à prouver un résultat plus fort que le trou spectral local, qui implique l'équipartition de certaines marches aléatoires et permet de construire certains graphes expanseurs, voir [**BISG17**, Corollaries G,H].

Équidécomposabilité mesurable. — On se place sous les hypothèses 10. On se pose la question suivante : étant donnés deux sous-ensembles $A, B \subset X$, peut-on partitionner A avec des ensembles mesurables $A_1, \dots, A_n$ et trouver des éléments $g_1, \dots, g_n \in \Gamma$ tels que la famille $g_1A_1, \dots, g_nA_n$ forme une partition de B? On dira alors que A et B sont mesurablement Γ-équidécomposables.

Si l'on ne requiert pas que les éléments de la partition soient mesurables, on dira simplement que A et B sont équidécomposables. Dans ce cas simplifié, cette question est relié à la notion de moyennabilité comme l'a découvert von Neumann [**vN29**].

En 2016, Grabowski-Máthé-Pikhurko ont relié cette question dans le cas mesurable au trou spectral local. Leur point de vue est différent du notre, et met au premier plan la fenêtre finie B. Voici leur résultat.

Théorème 13 **([GMP16]).** — *Considérons une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ qui a un trou spectral local par rapport à un sous ensemble $B \subset X$ de mesure finie non-nulle. Soit $A \subset X$ un sous-ensemble mesurable. Alors A et B sont mesurablement Γ-équidécomposables si et seulement s'ils sont Γ-équidécomposables et ont même mesure.*

3.2. Exemples. — Le principal résultat que nous montrons dans [**BISG17**] généralise le Théorème 7 dû à Bourgain-Gamburd, et Benoist-de Saxcé.

Théorème 14 **([BISG17]).** — *Soit G un groupe de Lie simple connexe, et Γ un sous-groupe dénombrable dense de G. Notons* Ad *la représentation adjointe de G sur son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ et supposons qu'il existe une base de $\mathfrak{G}$ dans laquelle les éléments* $\mathrm{Ad}(g)$, $g \in \Gamma$ *ont des coefficients algébriques.*

Alors l'action de translation $\Gamma \curvearrowright G$ a un trou spectral local.

On renvoie à l'introduction de [**BISG17**], et particulièrement à la Section I.4 pour des explications concernant la preuve et les principales nouveautés par rapport au cas compact. Mentionnons aussi que les ingrédients principaux dans la preuve de ce résultat ont été généralisés pour les groupes de Lie parfaits connexes dans [**BdS16a**] et [**HdS18**]. L'énoncé est donc aussi valable dans ce cadre.

Dans [**BI18**], nous nous sommes intéressé au cas des groupes d'isométries de $\mathbb{R}^d$: $\Gamma < G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d)$. Noter que G est un groupe parfait et les résultats récents de [**HdS18**] s'appliquent, ce qui permet de déduire le trou spectral local sous des hypothèses d'algébricité des coefficients des éléments de Γ. Le résultat principal de [**BI18**] montre aussi une propriété de trou spectral, mais les hypothèses sont différentes et ne portent que sur la partie linéaire de Γ (mais on suppose toujours que Γ est dense dans G).

Théorème 15 **([BI18]).** — *Prenons $d \geq 3$ et notons $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d) \simeq \mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d)$. Notons $\theta : G \to \mathrm{SO}(d)$ le morphisme qui à une isométrie associe sa partie linéaire. Prenons un sous-groupe dense $\Gamma < G$ et supposons que l'action de translation de $\theta(\Gamma)$ sur* $\mathrm{SO}(d)$ *a un trou spectral.*

Alors l'action $\Gamma \curvearrowright G$ a un trou spectral local.

Noter que la conclusion du théorème précédent implique que l'action $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}^d$ a aussi un trou spectral local. En effet, si G a un trou spectral local, nous pouvons choisir comme fenêtre finie $B \subset G$ un ensemble de la forme $B = B_0 \times \mathrm{SO}(d)$, où B_0 est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ (ici nous identifions G avec $\mathbb{R}^d \times \mathrm{SO}(d)$ comme espaces mesurés). Alors pour $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, nous pouvons appliquer l'inégalité (3.1) à $\tilde{F} : (x, \sigma) \in G \mapsto F(x)$. Il suit que F vérifie (3.1) avec la même constante C, le même ensemble fini $S \subset \Gamma$ et B_0 à la place de B.

En combinant ce résultat avec le Théorème 13 nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 16. — *Prenons $\Gamma < G$ comme dans le théorème 15. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^d$ deux ensembles mesurables bornés d'intérieur non-vide. Alors A et B sont mesurablement Γ-équidécomposables si et seulement si ils ont même mesure.*

Dans le reste de ce texte je vais présenter les principales étapes de la preuve du Théorème 15. Je renvoie à [**BI18**] pour les détails précis. Cette preuve est beaucoup plus simple que celle du Théorème 14. Cela n'est pas si surprenant puisque l'hypothèse dans l'énoncé est du même ordre que sa conclusion : une hypothèse de trou spectral. Cependant, nous allons voir que ce théorème est relié aux résultats de Lindenstraus et Varjù [**LV16**], qui reposent sur la même hypothèse mais dont l'argument est beaucoup plus sinueux. En fait notre approche simplifie leur preuve.

4. Preuve du Théorème 15

Dans toute cette section nous allons noter $G = \mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d)$ le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^d$, et nous supposerons $d \geq 3$ (c'est une condition nécessaire pour que l'hypothèse du Théorème 15 soit satisfaite).

4.1. Un critère de trou spectral local. — Le groupe $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d) \simeq \mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d)$ est un groupe moyennable. Dans cette situation le résultat suivant donne une caractérisation du trou spectral local uniquement en termes de la représentation régulière. Autrement dit, cette caractérisation n'implique plus de restreindre des fonctions sur une fenêtre finie. Ce critère est dû à Margulis [**Mar82**], et est la clé de sa solution au problème de Banach Ruziewicz. Plus précisément, Margulis utilise ce critère pour montrer que l'action $G \curvearrowright \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ a un trou spectral local.

Proposition 17. — *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, moyennable et $\Gamma < G$ un sous groupe dénombrable dense. L'action $\Gamma \curvearrowright G$ a un trou spectral local si et seulement si pour tout compact $K \subset G$ il existe une constante $C > 0$ et un ensemble fini $S \subset \Gamma$ tels que*

$$\sup_{g \in K} \|F - \sigma_g(F)\|_2 \leq C_0 \sup_{g \in S} \|F - \sigma_g(F)\|_2, \text{ pour tout } F \in L^2(G). \tag{4.1}$$

Ici σ désigne la représentation régulière gauche de G. En restriction à Γ, cette représentation correspond bien à la représentation de Koopman associée à l'action de translation et les notations sont cohérentes.

Démonstration. — Montrons seulement que cette condition implique le trou spectral local. Nous n'utiliserons pas la réciproque. Supposons par l'absurde que la condition de l'énoncé est satisfaite mais que l'action $\Gamma \curvearrowright G$ n'a pas un trou spectral local par rapport à un certain sous-ensemble B d'intérieur non-vide et relativement compact. Supposons que $\mu(B) = 1$. On peut alors construire une suite de fonctions F_n telles que $\int_B F_n d\mu = 0$ et $\|F_n\|_{2,B} = 1$ pour tout n tandis que $\lim_n \|F_n - \sigma_g(F_n)\|_{2,B} = 0$ pour tout $g \in \Gamma$.

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la masse des F_n s'équirépartit dans G, au sens où la mesure de Radon $\nu : C \subset G \mapsto \lim_n \int_C |F_n^2| d\mu$ est bien définie et égale à la mesure de Haar μ. Le fait qu'une telle mesure ν existe vient de l'hypothèse que G est à base dénombrable d'ouverts et d'un argument d'extraction diagonale. De plus, l'hypothèse de presque invariance de la suite F_n implique que $\nu(gC) = \nu(C)$ pour tout $C \subset B$ et tout $g \in \Gamma$. Il suit que cette égalité a encore lieu si C est contenu dans un translaté hB de B, $h \in G$, et finalement, reste valable pour tout sous-ensemble C relativement compact de G. Cela implique bien que ν est G-invariante. C'est donc une mesure de Haar sur G, qui vérifie $\nu(B) = 1$, i.e. $\nu = \mu$.

Par ailleurs, quitte à encore extraire une sous-suite, on peut supposer que pour tout ensemble mesurable relativement compact $C \subset G$, la suite $\mathbf{1}_C F_n$ converge faiblement vers 0. En effet, toujours par un argument d'extraction diagonale, on peut trouver une fonction $F \in L^2_{\mathrm{loc}}(G)$ telle que $\mathbf{1}_C F_n$ converge faiblement vers $\mathbf{1}_C F$ pour tout C relativement compact. Mais alors on vérifie que F est Γ-invariante, donc constante, par densité de Γ dans G. Mais comme $\int_B F d\mu = \lim_n \int_B F_n d\mu = 0$ on conclut que $F = 0$.

Prenons maintenant un compact $K \subset G$ d'intérieur non-vide et choisissons $C_0 > 0$ et $S \subset \Gamma$ fini tels que (4.1) soit satisfaite. Comme G est moyennable, on peut trouver un ouvert relativement compact $C \subset G$ tel que $\sup_{g\in S} \mu(C\Delta gC) \leq \mu(C)/4C_0^2$.

On définit alors la suite tronquée $\xi_n := F_n \mathbf{1}_C \in L^2(G)$, dont la norme 2 converge vers $\mu(C)^{1/2}$ puisque la masse des F_n est asymptotiquement équirépartie. Pour tout $g \in S$, on majore

$$\begin{aligned}
\limsup_n \|\xi_n - \sigma_g(\xi_n)\|_2 &= \limsup_n \|F_n \mathbf{1}_C - \sigma_g(F_n)\mathbf{1}_{gC}\|_2 \\
&\leq \limsup_n \left(\|F_n - \sigma_g(F_n)\|_{2,C} + \||\sigma_g(F_n)|\mathbf{1}_{gC\Delta C}\|_2\right) \\
&\leq 0 + \mu(C\Delta gC)^{1/2} \leq \mu(C)^{1/2}/2C_0.
\end{aligned}$$

L'équation (4.1) implique alors que pour fout $g \in K$, $\limsup_n \|\xi_n - \sigma_g(\xi_n)\|_2 \leq \mu(C)^{1/2}/2$. En définissant l'opérateur de moyenne $T_K : \xi \in L^2(G) \mapsto \frac{\mathbf{1}_K}{\mu(K)} * \xi \in L^2(G)$, on vérifie alors que

$$\limsup_n \|T_K(\xi_n) - \xi_n\|_2 \leq \limsup_n \frac{1}{\mu(K)} \int_K \|\sigma_g(\xi_n) - \xi_n\|_2 d\mu(g) \leq \mu(C)^{1/2}/2.$$

Mais la restriction de T_K à $L^2(C)$ est un opérateur compact. Comme la suite $(\xi_n)_n$ est bornée dans $L^2(C)$ et tend faiblement vers 0, son image $(T_K(\xi_n))_n$ tend vers 0 en norme. L'inégalité précédente est alors incompatible avec le fait que $\lim_n \|\xi_n\|_2 = \mu(C)^{1/2}$. $\square$

Noter que cette formulation du trou spectral local est plus favorable à l'étude des marches aléatoires. En effet l'ensemble S qui figure dans l'inégalité (4.1) est flexible, au sens où, quitte à modifier la constante C, on peut choisir pour S n'importe quel ensemble générateur fini de Γ. De plus l'inégalité implique une inégalité sur l'opérateur de marche aléatoire T_S associé de la forme

$$\Re(T_S) \leq 1 - c(1 - \Re(T_K)),$$

où c est une constante strictement positive et T_K est l'opérateur compact $F \mapsto \frac{1}{\mu(K)} \int_K \sigma_g(F) d\mu(g)$. $\Re(T)$ désigne la partie réelle $(T + T^*)/2$ d'un opérateur T. Ainsi si on peut diagonaliser explicitement l'opérateur auto-adjoint compact $\Re(T_K)$, on peut espérer déduire des informations sur la marche aléatoire associée à S.

4.2. La représentation régulière de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d)$**.** — Pour démontrer la condition de la Proposition 17 on va commencer par désintégrer la représentation régulière gauche de $G = \mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note π_x la représentation de G sur $L^2(\mathrm{SO}(d))$ donnée par la formule

$$\pi_x(g)F(\omega) = e^{-2i\pi\langle \omega x, v\rangle} F(r^{-1}\omega),$$

pour tout $g = (v, r) \in \mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d)$, $F \in L^2(\mathrm{SO}(d))$, et $\omega \in \mathrm{SO}(d)$.

Lemme 18. — *La représentation régulière de G est conjuguée à la représentation $\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \pi_x dx$.*

Démonstration. — On considère les deux unitaires U et $\mathcal{F}$ sur $L^2(G) = L^2(\mathbb{R}^d \times \mathrm{SO}(d))$ définis par les formules

$$U(F)(x,\omega) = F(\omega x, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(F)(x,\omega) = \int_{R^d} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} F(\xi,\omega) d\xi,$$

pour tout $F \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathrm{SO}(d))$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\omega \in \mathrm{SO}(d)$. Avec ces mêmes notations, et en prenant $g = (v,r) \in \mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{SO}(d)$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\sigma_g F)(\omega x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\langle \omega x,\xi\rangle} F(g^{-1}(\xi,\omega)) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\langle \omega x,\xi\rangle} F(r^{-1}(\xi - v), r^{-1}\omega) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi\langle \omega x,r\xi + v\rangle} F(\xi, r^{-1}\omega) d\xi = e^{-2i\pi\langle \omega x,v\rangle} \mathcal{F}(F)(r^{-1}\omega x, r^{-1}\omega).
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient $U\mathcal{F}(\sigma_g F)(x,\omega) = e^{-2i\pi\langle \omega x,v\rangle}(U\mathcal{F})(F)(x, r^{-1}\omega) = \pi_x(g)(\tilde{F}_x)(\omega)$, où $\tilde{F}_x$ désigne la fonction $\omega \mapsto (U\mathcal{F})(F)(x,\omega)$. On voit donc que l'unitaire $U\mathcal{F}$ entrelace la représentation régulière σ avec l'intégrale directe $\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \pi_x dx$. □

4.3. Un résultat sur les représentations π_x. — Le théorème suivant donne une majoration de la norme de certains opérateurs de moyenne $T_x = \frac{1}{|S|}\sum_{g\in S} \pi_x(g)$ sur $L^2(\mathrm{SO}(d))$, en fonction de x. Ce genre de majoration, en général démontré pour des opérateurs analogues sur $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$, permet typiquement de montrer un théorème limite local dans $\mathbb{R}^d$ portant sur la marche aléatoire $(X_n)_n$ dans $\mathbb{R}^d$ qui part d'un point arbitraire et dont chaque pas est obtenu en tirant un déplacement de S au hasard. Plus précisément, lorsque n tend vers l'infini, la distribution de X_n dans une boule de $\mathbb{R}^d$ tend, après une bonne renormalisation, vers la mesure de Lebesgue sur cette boule. Notamment cette stratégie apparait dans [**Kaz65**] et [**Gui76**] où le cas $d = 2$ est traité (noter dans ce cas que l'hypothèse de trou spectral n'a pas lieu, mais la commutativité de SO(2) est une propriété très forte). Une version plus précise est présentée dans la thèse de Breuillard [**Bre04**], où la bonne renormalisation nécessaire à la convergence est explicitée. La démonstration présentée dans [**Bre04**, Théorème] s'applique identiquement à $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ dès lors que la conclusion du théorème ci-dessous a lieu. Ainsi le théorème limite local est vérifié sous des hypothèses de trou spectral pour la partie de rotation des éléments de S. Signalons que ce cas était déjà connu de Conze et Guivarc'h [**CG13**] et d'ailleurs le théorème limite local est à présent connu pour $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ sous des hypothèses très générales, comme l'a démontré Varjù [**Var15**] par des méthodes plus sophistiquées.

Mentionnons enfin que le théorème ci-dessous généralise un énoncé du à Lindenstrauss et Varjù [**LV16**, Theorem 2.1], mais nous simplifions largement leur preuve.

Théorème 19. — *Prenons un ensemble symétrique fini $S \subset G$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on note T_x l'opérateur sur $L^2(\mathrm{SO}(d))$ défini par $T_x = \frac{1}{|S|}\sum_{g\in S} \pi_x(g)$. On suppose que*

(1) les éléments de S n'ont pas de point fixe commun sur $\mathbb{R}^d$ et
(2) T_0 a un trou spectral : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour toute fonction d'intégrale nulle $F \in L^2(\mathrm{SO}(d))$ on a $\|T_0(F)\|_2 \leq (1-\alpha)\|F\|_2$.

Alors il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $\|T_x\| \leq 1 - c_0 \min(1, |x|^2)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Noter que la représentation π_0 n'est autre que la composition de la projection $\theta : G \to \mathrm{SO}(d)$ avec la représentation régulière de $\mathrm{SO}(d)$. On voit alors que l'hypothèse (2) équivaut au fait que l'action $\theta(\Gamma) \curvearrowright \mathrm{SO}(d)$ a un trou spectral, où $\Gamma < G$ est le sous-groupe engendré par S. Noter de plus que la condition (1) est automatiquement satisfaite dès lors que Γ est dense dans G. Ainsi, si on prend Γ comme dans le Théorème 15 alors n'importe quel ensemble générateur fini S de Γ satisfait les conditions (1) et (2). Si Γ n'est pas de type fini, on a en fait besoin d'un raffinement du Théorème 19, mais nous ne discuterons pas ce cas.

On vérifie facilement que les deux étapes suivantes suffisent à montrer ce résultat :

- Pour x de petite norme, on montre l'inégalité quadratique $1 - \|T_x\| \geq c_1|x|^2$ pour une constante $c_1 > 0$;
- On montre que si pour une valeur donnée de x, $\|T_x\| < 1$ alors pour tous les $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $|y| \geq |x|$, on a $\|T_y\| < 1 - c_2$ avec c_2 qui ne dépend pas de y, mais seulement de la quantité $1 - \|T_x\|$.

Concernant la première étape, mentionnons seulement que lorsque $|x|$ est petit, l'opérateur T_x est proche de T_0. On utilise alors une première fois l'hypothèse de trou spectral de T_0 pour exprimer que $\|T_x\|$ est grossièrement égal à $\|T_x 1\|$. On peut alors effectuer un développement limité de l'exponentielle qui apparait dans la formule de π_x, ce qui explique le comportement en $|x|^2$.

Donnons quelques détails sur la deuxième étape. La principale nouveauté qui simplifie beaucoup l'argument par rapport à l'argument de Lindenstrauss et Varjú est l'utilisation de la représentation régulière droite de $\mathrm{SO}(d)$ sur $L^2(\mathrm{SO}(d))$. Cela implique le lemme suivant.

Lemme 20. — *Si $x, y \in \mathbb{R}^d$ sont de même norme alors $\|T_x\| = \|T_y\|$.*

Démonstration. — Notons ρ la représentation régulière droite de $\mathrm{SO}(d)$, donnée par la formule $\rho_g(F)(\omega) = F(\omega g)$ pour tout $F \in L^2(\mathrm{SO}(d))$, $\omega, g \in \mathrm{SO}(d)$. Un calcul montre que $\rho_g T_x \rho_g^* = T_{gx}$, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $g \in \mathrm{SO}(d)$. Comme les opérateurs ρ_g sont unitaires et $\mathrm{SO}(d)$ agit transitivement sur toute sphère $\{|x| = r\}$, pour $r \geq 0$, le résultat suit. $\square$

Cette observation simple se combine particulièrement bien avec le lemme suivant, qui découle des preuves des Lemmes 3.3 et 3.4 [**LV16**]. Cette idée apparaît également dans [**CG13**, Proposition 3.10].

Lemme 21. — *Il existe une constante $C > 0$ (qui dépend du trou spectral de T_0) telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$1 - \|T_{x-y}\| \leq C \max(1 - \|T_x\|, 1 - \|T_y\|).$$

Éléments de démonstration. — Ce lemme repose sur trois observations. On renvoie à [**LV16**, Section 3] pour les détails et quantifications précises.

La première observation est classique, elle dit grossièrement que la norme de T_x est proche de 1 si et seulement s'il existe une fonction F qui est presque invariante sous les $\pi_x(g)$, $g \in S$ (on suppose que $e \in S$). Cela repose sur le calcul suivant. Soit $F \in L^2(\mathrm{SO}(d))$ de norme 1 telle que $\|T_x F\|_2^2 \geq (1-\varepsilon)$. Alors nous avons

$$\sum_{g,h\in S} \|\pi_x(g^{-1}h)F - F\|_2^2 = 2\sum_{g,h\in S}(1 - \langle \pi_x(g^{-1}h)F, F\rangle)$$
$$= 2|S|^2(1 - \langle T_x^* T_x F, F\rangle) \leq 2|S|^2\varepsilon.$$

La deuxième observation est une égalité formelle. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $g \in G$, et $F_1, F_2 \in L^2(\mathrm{SO}(d))$, nous avons

$$\pi_{x-y}(g)F_1\overline{F_2} = (\pi_x(g)F_1)(\overline{\pi_y(g)F_2}).$$

Le raisonnement pour conclure le lemme est alors le suivant : si F_1 est presque invariante sous les $\pi_x(g)$, $g \in S$, et F_2 est presque invariante sous les $\pi_y(g)$, alors $F_1\overline{F_2}$ sera presque invariante sous les $\pi_{x-y}(g)$.

Mais il y a un problème quand on essaie de quantifier cette presque invariance de $F_1\overline{F_2}$: on n'arrive pas à priori à contrôler la norme 2 de cette fonction. En fait pour certaines fonctions F_1 et F_2 le produit $F_1\overline{F_2}$ n'est même pas dans L^2 ! Remarquons tout de même que si F_1 et F_2 sont de module constant égal à 1, alors c'est aussi le cas de $F_1\overline{F_2}$. Le raisonnement ci-dessus sera donc valable si on parvient à montrer que pour tout x tel que $\|T_x\| \geq 1-\varepsilon$, il existe une fonction radiale F telle que $\|T_x F\|_2 \geq (1-C\varepsilon)\|F\|_2$, pour une constante universelle C.

La troisième observation est que si F est presque invariante sous les $\pi_x(g)$, $g \in S$ alors sa valeur absolue $|F|$ est presque invariante sous les $\pi_0(g)$. L'hypothèse de trou spectral sur T_0 nous dit donc que $|F|$ est presque constante. En d'autre termes, F est poche en norme 2 d'une fonction de module constant, et nous pouvons appliquer le raisonnement ci-dessus. □

Le lemme suivant conclut la deuxième étape de la démonstration du Théorème 19.

Lemme 22. — *Soit $C > 0$ la constante donnée par le lemme précédent. Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$, tels que $|x| \geq |x'|/2$, on a $1 - \|T_{x'}\| \leq C(1 - \|T_x\|)$.*

Démonstation. — Notons $t := |x'|$. Comme $|x| \geq t/2$, la sphère centrée en 0 de rayon $|x|$ a un diamètre supérieur ou égal à t. On peut donc trouver $y \in \mathbb{R}^d$ sur cette sphère tel que $|x-y| = t$. En combinant les deux lemmes précédents il vient

$$1 - \|T_{x'}\| = 1 - \|T_{x-y}\| \leq C\max(1-\|T_x\|, 1-\|T_y\|) = C(1-\|T_x\|). \qquad \square$$

4.4. Conclusion du Théorème 15. — Considérons un sous-groupe $\Gamma < G$ comme dans le Théorème 15. Pour montrer que l'action de translation $\Gamma \curvearrowright G$ a un trou spectral, on va utiliser la Proposition 4.1. On suppose pour simplifier que Γ est de type fini, engendré par un ensemble fini symétrique S et pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note T_x l'opérateur associé. Comme observé après l'énoncé du Théorème 19, l'ensemble S vérifie automatiquement les conditions (1) et (2) de ce théorème.

Prenons un compact K dans G. Notons K_0 l'ensemble des composantes de translation des éléments de K, de sorte que $K \subset K_0 \times \mathrm{SO}(d)$ (ensemblistement). Notons $A := \sup_{v\in K_0}|v|$, et notons B la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^d$. Soit $F := \int_{R^d}^{\oplus} F_x dx$

une fonction dans $L^2(G)$, que l'on désintègre en utilisant le Lemme 18. Pour $v \in K_0$, on majore

$$\begin{aligned}\|\sigma_v(F) - F\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \|\pi_x(v)F_x - F_x\|_2^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathrm{SO}(d)} (2 - 2\cos(2\pi\langle \omega x, v\rangle))|F_x(\omega)|^2 d\omega dx \\ &\leq \int_B \int_{\mathrm{SO}(d)} (2\pi\langle \omega x, v\rangle)^2 |F_x(\omega)|^2 d\omega dx + 4\int_{\mathbb{R}^d\setminus B} \|F_x\|^2 dx \\ &\leq 4\pi^2 A^2 \int_B |x|^2 \|F_x\|^2 dx + 4\int_{\mathbb{R}^d\setminus B} \|F_x\|^2 dx.\end{aligned}$$

D'autre part, le Théorème 19 nous permet de calculer:

$$\frac{1}{|S|}\sum_{g\in S} \|\sigma_g(F) - F\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} 2\|F_x\|_2^2 - 2\langle T_x F_x, F_x\rangle dx \geq c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \min(1, |x|)\|F_x\|_2^2 dx.$$

En combinant ces inégalités et en posant $C := (4\pi^2A^2 + 4)/c_0|S|$, on obtient

$$\|\sigma_v(F) - F\|_2^2 \leq C \sum_{g\in S} \|\sigma_g(F) - F\|_2^2.$$

Cela montre que le critère de la Proposition 4.1 est vérifié pour la partie de translation de K. La partie de rotation est gérée en utilisant une nouvelle fois l'hypothèse de trou spectral. On renvoie à [**BI18**] pour les détails.

Remerciements. Je remercie Emmanuel Breuillard pour ses commentaires et corrections utiles sur une version préliminaire de ce texte.

Références

[AE12] M. Abért and G. Elek. Dynamical properties of profinite actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(6):1805–1835, 2012.

[Ban23] S. Banach. Sur le problème de la mesure. *Fund. Math.*, 4:7–33, 1923.

[BdS16a] Y. Benoist and N. de Saxcé. Convolution in perfect Lie groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 161(1):31–45, 2016.

[BdS16b] Y. Benoist and N. de Saxcé. A spectral gap theorem in simple Lie groups. *Invent. Math.*, 205(2):337–361, 2016.

[BG07] E. Breuillard and T. Gelander. A topological Tits alternative. *Ann. of Math. (2)*, 166(2):427–474, 2007.

[BG08] J. Bourgain and A. Gamburd. On the spectral gap for finitely-generated subgroups of SU(2). *Invent. Math.*, 171(1):83–121, 2008.

[BG12] J. Bourgain and A. Gamburd. A spectral gap theorem in SU(d). *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(5):1455–1511, 2012.

[BI18] R. Boutonnet and Ad. Ioana. Local spectral gap in the group of euclidean isometries. *Int. Math. Res. Not.*, (rny029), 2018.

[BISG17] R. Boutonnet, A. Ioana, and A. Salehi-Golsefidy. Local spectral gap in simple Lie groups and applications. *Invent. Math.*, 208(3):715–802, 2017.

[BL18] E. Breuillard and A. Lubtztky. expansion in simple groups. *Preprint*, arXiv:1807.03879, 2018.

[Bre04] E. Breuillard. *Equidistribution of random walks on nilpotent Lie groups and homogeneous spaces*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2004. Thesis (Ph.D.)–Yale University.

[CG13] J.-P. Conze and Y. Guivarc'h. Ergodicity of group actions and spectral gap, applications to random walks and Markov shifts. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(9):4239–4269, 2013.

[dJR79] A. del Junco and J. Rosenblatt. Counterexamples in ergodic theory and number theory. *Math. Ann.*, 245(3):185–197, 1979.

[Dri84] V. G. Drinfeld. Finitely-additive measures on S^2 and S^3, invariant with respect to rotations. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 18(3):77, 1984.

[FS99] A. Furman and Y. Shalom. Sharp ergodic theorems for group actions and strong ergodicity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):1037–1061, 1999.

[GMP16] L. Grabowski, A. Máthé, and O. Pikhurko. Measurable equidecompositions for group actions with an expansion property. *Preprint*, arXiv:1601.02958, 2016.

[Gui76] Y. Guivarc'h. Equirépartition dans les espaces homogènes. pages 131–142. Lecture Notes in Math., Vol. 532, 1976.

[HdS18] W. He and N. de Saxcé. Sum-product for real lie groups. *Preprint*, arXiv:1806.06375, 2018.

[Ioa17] A. Ioana. Strong ergodicity, property (T), and orbit equivalence rigidity for translation actions. *J. Reine Angew. Math.*, 733:203–250, 2017.

[Kak51] S. Kakutani. Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*, pages 247–261. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[Kaz65] D. A. Kazhdan. Uniform distribution on a plane. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 14:299–305, 1965.

[KI40] Y. Kawada and K. Itô. On the probability distribution on a compact group. I. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3)*, 22:977–998, 1940.

[Lub94] A. Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, volume 125 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. With an appendix by Jonathan D. Rogawski.

[LV16] E. Lindenstrauss and P. Varjú. Random walks in the group of Euclidean isometries and self-similar measures. *Duke Math. J.*, 165(6):1061–1127, 2016.

[Mar80] G. A. Margulis. Some remarks on invariant means. *Monatsh. Math.*, 90(3):233–235, 1980.

[Mar82] G. A. Margulis. Finitely-additive invariant measures on Euclidean spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(3-4):383–396 (1983), 1982.

[Mar18] A. Marrakchi. Strongly ergodic actions have local spectral gap. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(9):3887–3893, 2018.

[Ros81] J. Rosenblatt. Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 265(2):623–636, 1981.

[Sch80] K. Schmidt. Asymptotically invariant sequences and an action of SL(2, $\mathbf{Z}$) on the 2-sphere. *Israel J. Math.*, 37(3):193–208, 1980.

[Sch81] K. Schmidt. Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group-actions. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1(2):223–236, 1981.

[Sul81] D. Sullivan. For $n > 3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 4(1):121–123, 1981.

[Var15] P. Varjú. Random walks in Euclidean space. *Ann. of Math. (2)*, 181(1):243–301, 2015.

[vN29] J. von Neumann. Zur allgemeinen theorie des masses. *Fund. Math.*, 13(1):73–116, 1929.

Rémi Boutonnet, CNRS – Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux, 351 cours de la Libération, 33 405 Talence Cedex, France
E-mail : remi.boutonnet@math.u-bordeaux.fr