NOTATIONS ET OBJECTIFS DE L'ÉPREUVE

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels positifs ou nuls, par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes. Pour $z \in \mathbf{C}$, on désigne respectivement par $Re(z)$ et $Im(z)$ la partie réelle de z et la partie imaginaire de z.
Si $A \subset \mathbf{C}$ est une partie de $\mathbf{C}$, on note $\mathbf{C} - A$ le complémentaire de A dans $\mathbf{C}$.

On note sh et ch les fonctions sinus et cosinus hyperboliques :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \ \ \mathrm{sh}(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} \ \text{ et } \ \mathrm{ch}(z) = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Dans un premier temps, nous établirons la relation suivante :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \ \ \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\mathrm{sh}(n\pi)} \mathrm{ch}(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\mathrm{sh}(n\pi)} \cos(nx) = 0.$$

Ce sera l'objet des parties I, II, III et IV. Dans la partie V, nous déduirons de cette formule l'existence d'une fonction doublement périodique définie sur le plan complexe privé d'une famille dénombrable de points tous situés sur un réseau.

Partie I

Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.
Pour $y \in \mathbf{R}$, on pose $\hat{f}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ixy} dx$.

1. Établir que la fonction f est intégrable sur $\mathbf{R}$, puis que $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

2. Pour x réel, on pose $u_0(x) = f(x)$ et, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n(x) = f(x+2\pi n) + f(x-2\pi n)$. On définit une fonction g en posant $g(x) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{+N} f(x+2\pi n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, lorsque cette somme converge.

Dans ce cas, on note aussi $g(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)$ cette limite.

(a) Démontrer que g est définie sur $\mathbf{R}$.

(b) Établir que g est une fonction périodique dont on précisera une période.

(c) Démontrer que les séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ convergent normalement sur tout compact de $\mathbf{R}$.

(d) En déduire que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

3. À l'aide de ce qui précède, établir la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}.$$

4. On fixe $t \in \mathbf{C} - i\mathbf{Z}$. On définit une fonction h_t sur $\mathbf{R}$ de la façon suivante :
pour $x \in [-\pi, \pi[$, on pose $h_t(x) = \mathrm{e}^{tx}$ et on étend à $\mathbf{R}$ en une fonction 2π-périodique.

   (a) Déterminer les coefficients de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de h_t.

   (b) Préciser le domaine de convergence de la série de Fourier de h_t.

   (c) La série de Fourier de h_t converge-t-elle en tout point vers la fonction h_t ?

5. En déduire

$$\forall t \in \mathbf{C} - i\mathbf{Z}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^2(-1)^k}{t^2 + k^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} - 1\right).$$

Partie II

On dit qu'une suite de nombres complexes $(u_k)_{k\in\mathbf{Z}}$, indexée par $\mathbf{Z}$, est sommable si et seulement s'il existe un réel positif M vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{-n\leqslant k\leqslant n} |u_k| = \sum_{k=-n}^{n} |u_k| \leqslant M.$$

Soit $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$ une suite double de nombres complexes indexée par $\mathbf{Z}^2$. On dit que cette suite est sommable si et seulement s'il existe un réel positif M vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{-n\leqslant k,l\leqslant n} \left|u_{k,l}\right| = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} \left|u_{k,l}\right| \leqslant M.$$

6. **(a)** Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ une suite sommable, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{-n\leqslant k\leqslant n} u_k$.

   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. On note alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$ la limite.

   (b) Soit $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2} \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}^2}$ une suite double sommable, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{-n\leqslant k,l\leqslant n} u_{k,l}$.

   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Dans un tel cas, on note $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2} u_{k,l}$.

7. On considère $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$ une suite double à valeurs <u>positives</u> telle que, pour tout $k\in\mathbf{Z}$, la suite $(u_{k,l})_{l\in\mathbf{Z}}$ soit sommable, et on note $\alpha_k=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}u_{k,l}$ la somme de cette série.

On suppose de plus que la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est sommable. Démontrer que la suite double $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$ est sommable et :

$$\sum_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}u_{k,l}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}u_{k,l}.$$

8. Réciproquement, soit $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$ une suite double à valeurs <u>positives</u> et sommable. Montrer que, pour tout $k\in\mathbf{Z}$, la suite $(u_{k,l})_{l\in\mathbf{Z}}$ est sommable. On note α_k sa somme. Établir la sommabilité de la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ et l'égalité $\sum_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}u_{k,l}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_k$.

9. Soit $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$ une suite double de nombres complexes. On suppose que, pour tout $k\in\mathbf{Z}$, la suite $(|u_{k,l}|)_{l\in\mathbf{Z}}$ est sommable de somme α_k et que la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est aussi sommable. Déduire de ce qui précède que :

(i) la suite $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}$ est sommable ;

(ii) pour tout l, la suite $(|u_{k,l}|)_{k\in\mathbf{Z}}$ est sommable et si β_l en est la somme, alors la suite $(\beta_l)_{l\in\mathbf{Z}}$ est sommable ;

(iii) de plus,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}u_{k,l}=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u_{k,l}=\sum_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2}u_{k,l}.$$

Indication : commencer par le cas des suites positives, puis réelles et enfin complexes.

Partie III

Pour x réel, et lorsque la série converge, on définit $\varphi(x)$ par : $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n\operatorname{ch}(nx)}{\operatorname{sh}(n\pi)}$.

10. Déterminer le domaine de définition de φ (sur $\mathbf{R}$).

11. Démontrer que φ est de classe C^∞ sur $]-\pi,\pi[$.

12. Établir que pour $n\geqslant 1$, $\dfrac{1}{\operatorname{sh}(n\pi)}=2\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-(2k+1)n\pi}$ et en déduire, avec justification, que :

$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\quad \varphi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n\left(e^{nx-(2k+1)n\pi}+e^{-nx-(2k+1)n\pi}\right).$$

13. Démontrer que :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x-(2k+1)\pi)}.$$

14. En déduire que φ se prolonge en une fonction paire, 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

15. Déterminer une fonction ψ de classe C^∞ définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(n)\mathrm{e}^{inx} \quad \text{et} \quad \psi(\pi) = \frac{1}{4}.$$

Partie IV

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $\gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\mathrm{ch}^2(t)}dt$.

16. Vérifier que la fonction γ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

17. Démontrer que la fonction γ est continue sur $\mathbf{R}$.

18. Avec les notations de la partie précédente, relier simplement $\hat{\psi}$ et γ.

19. Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \gamma(x) = 1 - 4x\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2t}}\sin(2xt)dt.$$

20. En déduire :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \gamma(x) = 1 + 2x^2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+x^2}.$$

21. Déterminer alors une expression de la fonction γ à l'aide des fonctions usuelles (on distinguera le cas $x = 0$).

22. Établir que :

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{\mathrm{sh}(n\pi)}\mathrm{ch}(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{\mathrm{sh}(n\pi)}\cos(nx) = 0.$$

Que vaut $\varphi(0)$?

Partie V

23. Établir pour $t \in \mathbf{C} - i\left(\dfrac{1}{2} + \mathbf{Z}\right)$ la sommabilité de la suite $\left(\dfrac{1}{\left(t + i(\frac{1}{2} + n)\right)^2}\right)_{n \in \mathbf{Z}}$.

24. (a) À l'aide de la question 4, établir, pour $t \in \mathbf{C} - i\mathbf{Z}$, l'égalité :

$$\frac{\mathrm{ch}(\pi t)}{\mathrm{sh}(\pi t)} = \frac{1}{\pi t} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - in} + \frac{1}{t + in} \right).$$

(b) En déduire que, pour $t \in \mathbf{C} - i\mathbf{Z}$, on a : $\dfrac{\pi^2}{\mathrm{sh}^2(\pi t)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + in)^2}$.

(c) En déduire l'égalité : $\forall t \in \mathbf{C} - i\left(\dfrac{1}{2} + \mathbf{Z}\right),\ \dfrac{\pi^2}{\mathrm{ch}^2(\pi t)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{\left(t + i(\frac{1}{2} + n)\right)^2}$.

Définissons enfin la fonction $\mathscr{G}$ sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ \mathscr{G}(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$ où φ est la fonction définie à la partie III et prolongée sur $\mathbf{R}$ à la question 14.

25. Établir que : $\forall x \in \mathbf{R},\ \mathscr{G}(x) = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2} - (k + \frac{1}{2})\pi\right)} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left((k + \frac{1}{2})\pi\right)} \right)$.

26. Établir, pour tout réel x, la sommabilité de la suite double

$$\left(\frac{1}{(x - (2k+1)\pi - (2l+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi + (2l+1)i\pi)^2} \right)_{(k,l) \in \mathbf{Z}^2}.$$

27. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathscr{G}(x) = -\sum_{(k,l) \in \mathbf{Z}^2} \left(\frac{1}{(x - (2k+1)\pi - (2l+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi + (2l+1)i\pi)^2} \right).$$

28. On note $\Lambda = (2\mathbf{Z} + 1)\pi + i(2\mathbf{Z} + 1)\pi$.
Établir, pour tout $z \in \mathbf{C} - \Lambda$, la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{1}{(z - (2k+1)\pi - (2l+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi + (2l+1)i\pi)^2} \right)_{(k,l) \in \mathbf{Z}^2}.$$

Tournez la page S.V.P.

29. D'après ce qui précède la fonction $\wp$ admet un prolongement sur $\mathbf{C} - \Lambda$:

$$\forall z \in \mathbf{C} - \Lambda, \quad \wp(z) = -\sum_{(k,l)\in\mathbf{Z}^2} \left(\frac{1}{(z-(2k+1)\pi-(2l+1)i\pi)^2} - \frac{1}{((2k+1)\pi+(2l+1)i\pi)^2} \right).$$

Par la suite, on désigne aussi par $\wp$ cette fonction prolongée.

(a) Vérifier que la fonction $\wp$ est 2π périodique, $2i\pi$ périodique et paire.

(b) Établir que $\wp$ est développable en série entière de la variable complexe au voisinage 0, le rayon de la série entière étant précisément $\sqrt{2}\pi$.

(c) Établir que $\wp$ est développable en série entière au voisinage de tout $z \in \mathbf{C} - \Lambda$.

——— FIN DU SUJET ———

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 0336 – D'après documents fournis