université de BORDEAUX	**Année universitaire 2014-2015** S1 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques Fondamentales / Mathématiques et Informatique — **Code UE :** N1MA4W11 **Épreuve :** **Algèbre 3** 19 mai 2015 : 14h (durée : 3h) *Documents interdits* Responsable de l'épreuve : Renaud Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

Les cinq exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Dans toute la suite, on note $a \wedge b$ le PGCD de deux entiers et $a \vee b$ leur PPCM.

Exercice 1. Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 3 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

1. Déterminer la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer l'ordre de σ.
3. Calculer σ^{2015}.

Exercice 2. On rappelle que la partie entière d'un nombre rationnel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier n tel que

$$n \leq x < n+1$$

et que sa partie fractionnaire, notée $\{x\}$ est définie par

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Soit b un entier naturel non nul.
   (a) Donner une expression simple de $\left\{\frac{n}{b}\right\}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant la division euclidienne par b.
   (b) Montrer que pour tous $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ on a
   $$\left\{\frac{m}{b}\right\} = \left\{\frac{n}{b}\right\} \Leftrightarrow m \equiv n \mod b.$$
2. Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ avec a et b entiers, $b \geq 1$ et $a \wedge b = 1$.
   (a) On note $\bar{k}$ la classe modulo b d'un entier k. Montrer que l'application
   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ & \bar{k} & \mapsto & \overline{ka} \end{array}$$
   est un automorphisme de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, +)$, c'est-à-dire un morphisme de groupes bijectif de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même.
   (b) Montrer que $\sum_{k=0}^{b-1} \left\{\frac{ka}{b}\right\} = \frac{b-1}{2}$.

Suite au dos de la feuille $\rightarrow$

Exercice 3. On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des éléments de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont inversibles pour la multiplication est un groupe, la loi de groupe étant induite par la multiplication de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout entier naturel a les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $a \wedge n = 1$,
   (b) la classe de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible pour la multiplication,
2. On s'intéresse dans cette question au groupe $G = (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ des éléments de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication.
   (a) Quel est l'ordre de G ? Quels sont les ordres possibles pour un élément de G ?
   (b) On note $\overline{10}$ la classe de 10 modulo 17. Vérifier que $\overline{10}$ appartient à G et déterminer son ordre. Le groupe G est-il cyclique ?
3. On s'intéresse dans cette question au groupe $H = (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ des éléments de $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication.
   (a) Quel est l'ordre de H ?
   (b) Montrer que H n'est pas cyclique.

Exercice 4. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif unitaire non réduit à $\{0\}$. On dit qu'un élément a non nul de A est un *diviseur de zéro* s'il existe un élément b non nul de A tel que $ab = 0$, et qu'il est inversible s'il existe $c \in A$ tel que $ac = 1$. À tout élément a de $A \setminus \{0\}$ on associe l'application

$$m_a : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & a \cdot x \end{array}$$

de multiplication par a.

1. Montrer que l'application m_a est un morphisme du groupe additif $(A, +)$ dans lui-même.
2. Montrer que $\ker m_a \neq \{0\}$ si et seulement si a est un diviseur de zéro.
3. À quelle condition le morphisme m_a est-il surjectif ?
4. On suppose A de **cardinal fini**. En utilisant les questions précédentes, montrer qu'un élément non nul de A est soit inversible soit diviseur de zéro.
5. Donner un exemple d'anneau infini et d'un élément non nul de cet anneau qui ne soit ni inversible ni diviseur de zéro.

Exercice 5. Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } 10^n x \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que la différence et le produit de deux éléments de $\mathbb{D}$ sont encore des éléments de $\mathbb{D}$. En déduire que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Soit I un idéal de $\mathbb{D}$. Rappelons que cela signifie que $(I, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{D}, +)$ et que pour tout $a \in \mathbb{D}$ et tout $x \in I$ on a $ax \in I$.
   (a) Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
   (b) En utilisant un résultat du cours, montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $I \cap \mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
   (c) Montrer que $I = d\mathbb{D}$ (on procédera par double inclusion).