université de BORDEAUX	**Année universitaire 2014-2015** S2 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques Fondamentales / Mathématiques et Informatique — **Code UE :** N1MA4W11 **Épreuve : Algèbre 3** 23 juin 2015 : 14h (durée : 3h) *Documents interdits* Responsable de l'épreuve : Renaud Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

Les exercices sont indépendants.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

L'usage de la calculatrice est autorisé, bien qu'inutile.

Exercice 1. Décrire tous les sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 2.

Soit $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles de taille 2×2 inversibles, la loi de groupe étant le produit matriciel usuel et l'élément neutre la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On ne demande pas de re-démontrer que $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ *est bien un groupe.*

On considère, dans $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, les éléments

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'ordre de A et celui de B.
2. Montrer que $AB = B^{-1}A$.
3. Soit $H = \langle A \rangle$ et $K = \langle B \rangle$ les sous-groupes de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$engendrés respectivement par A et B.
   (a) Montrer que $H \cap K = \{I\}$.
   (b) Montrer que si i et j sont des entiers relatifs on a l'équivalence :
   $$B^i A^j = I \iff \begin{cases} i \equiv 0 \mod 4 \\ j \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$
4. Justifier que les éléments $I, B, B^2, B^3, A, BA, B^2A, B^3A$ sont deux à deux distincts et qu'ils forment un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, noté G dans la suite.
5. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 2 dans G ?
6. Montrer que K un sous-groupe normal de G.
7. Le sous-groupe H est-il normal ?

Suite au dos de la feuille →

Exercice 3.

1. On considère, dans S_8, la permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Quel est son support ?
   (b) Quel est son ordre ?
   (c) Calculer p^{10000}.

2. Le groupe S_8 contient-t-il des éléments d'ordre 15 ?

3. Le groupe S_8 contient-t-il des éléments d'ordre 14 ?

Exercice 4. On étudie dans cet exercice le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ constitué des nombres réels qui s'écrivent sous la forme d'une somme $m + n\sqrt{2}$ avec m et n entiers relatifs. Autrement dit

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2, x = m + n\sqrt{2} \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

2. Soit $\phi : A \to A$ l'application qui à $x = m + n\sqrt{2}$ associe $\phi(x) = m - n\sqrt{2}$. Montrer que ϕ est un morphisme d'anneaux.

3. Pour tout $x \in A$, on pose $N(x) = x\phi(x)$

   (a) Montrer que $N(x)$ appartient à $\mathbb{Z}$ pour tout $x \in A$.
   (b) Montrer que l'application $N : A \to \mathbb{Z}$ est *multiplicative*, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall x \in A, \forall y \in A, N(xy) = N(x)N(y).$$

   (c) Montrer que si $N(x) = \pm 1$, alors x est inversible dans A.
   (d) Inversement, montrer que si x est inversible dans A, alors $N(x) = \pm 1$.
   (e) Montrer que l'élément $(3 - 2\sqrt{2})^4$ est inversible dans A et calculer son inverse.