Université Bordeaux — **Algèbre 3 – Licence 2**
Mathématiques — Année 2015–2016

Devoir Maison n° 1

À rendre avant les vacances de février

Exercice 1 –

Les nombres a, b, c, d sont des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$. Dites si les propriétés suivantes sont vraies, en justifiant votre réponse (i.e. donnez une démonstration si c'est vrai et un contre-exemple si c'est faux). Dans le cas où la propriété est fausse, donnez une variante de l'énoncé qui soit vraie.

1. Si a divise b et si b divise c, alors a divise c.
2. Si a divise b et c, alors a divise $2b + 3c$.
3. S'il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 4$, alors $\operatorname{pgcd}(a, b) = 4$.
4. Si $7a - 9b = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.
5. Si a divise b, b divise c et c divise a, alors $|a| = |b|$.
6. "a et b premiers entre eux" équivaut à "$\operatorname{ppcm}(a, b) = |ab|$".
7. Si a divise c et si b divise d, alors ab divise cd.
8. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a, alors 9 divise b.
9. Si a divise b ou a divise c, alors a divise bc.
10. "a divise b" équivaut à "$\operatorname{ppcm}(a, b) = |b|$".
11. Si a ne divise pas b, alors a est premier avec b.
12. Si a divise b, alors a n'est pas premier avec b.

Exercice 2 –

Soit n un entier ≥ 2. On note $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre n. On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un dérangement si σ n'admet pas de point fixe, i.e. si $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et d_n le cardinal de $\mathcal{D}_n$.

1. Montrer que $\mathcal{O}_2 = \mathcal{D}_2$ et que $\mathcal{O}_3 = \mathcal{D}_3$.
2. Montrer que $\mathcal{O}_4 \subsetneq \mathcal{D}_4$ et déterminer d_4.
3. Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Déterminer $|\mathcal{O}_p|$ et montrer que $\mathcal{O}_p \subsetneq \mathcal{D}_p$.
4. Montrer que $\mathcal{O}_6 \not\subset \mathcal{D}_6$ et que $\mathcal{D}_6 \not\subset \mathcal{O}_6$.
5. Soit p un nombre premier. Montrer que s'il existe dans $\mathcal{D}_n$ un élément d'ordre p, alors p divise n.
6. Soit $\sigma \in \mathcal{D}_n$ où $n \geq 4$. On note τ la transposition $(n\ \sigma(n))$.
   a) Montrer que l'ensemble des points fixes de $\tau\sigma$ est soit $\{n\}$, soit $\{n, \sigma(n)\}$.
   b) Montrer que dans le premier cas, la restriction de $\tau\sigma$ à $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ appartient à $\mathcal{D}_{n-1}$.
   c) Montrer que dans le second cas, la restriction de σ à $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{n, \sigma(n)\}$ est une bijection de cet ensemble sur lui-même sans point fixe.
7. En déduire que si $n \geq 4$, on a $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$.
8. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$
9. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tirée au hasard soit un dérangement. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}.$$