Devoir surveillé

11 mars 2016, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Exercice 1. Soit G l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ où a parcourt l'ensemble des nombres complexes **non nuls**.

1. Montrer que le produit matriciel définit une loi de composition interne sur G.
2. Déterminer une matrice E dans G vérifiant la propriété :
$$\forall A \in G, AE = EA = A.$$
3. Montrer que G, muni du produit matriciel, est un groupe abélien.
4. À quelle condition sur a l'élément $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ est-il d'ordre fini dans G ?

Exercice 2.

1. Dans S_6, on considère le cycle
$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)\,.$$
Déterminer la décomposition en cycles à supports disjoints des permutations σ^2, σ^3, σ^4 et σ^5.
2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Dans S_n, on considère le n-cycle $\gamma = (1\ 2\ \ldots\ n)$.
   (a) Déterminer $\gamma^k(1)$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et en déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a
   $$\gamma^k(1) = 1 \Leftrightarrow n \text{ divise } k.$$
   (b) Soit ℓ un entier naturel non nul. On note d le PGCD de ℓ et de n. Déduire de la question précédente que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on a
   $$\gamma^{\ell m}(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{n}{d} \text{ divise } m.$$
   (c) Montrer que γ^ℓ est un n-cycle si et seulement si ℓ est premier à n.

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ des nombres complexes non nuls est un groupe pour la multiplication (on ne demande pas de le redémontrer). Pour tout entier naturel n non nul, on définit
$$U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}\,.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, U_n est un sous-groupe cyclique de $\mathbb{C}^\times$.
2. Déterminer tous les sous-groupes de U_{12}.
3. Montrer que si H est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$, il existe un entier naturel non nul n tel que $H = U_n$.
[Indication : *On commencera par montrer que si H est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$, il existe N tel que $H \subset U_N$*]