

## FEUILLE D'EXERCICES n° 2

### Permutations

On note  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , où  $n$  est un entier  $\geq 2$  pour éviter le cas trivial  $n = 1$ . Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  on note  $\varepsilon(\sigma)$  la signature de  $\sigma$ .

#### Exercice 1 –

- 1) Dresser la liste des éléments de  $\mathfrak{S}_3$ .
- 2) Établir la table de  $\mathfrak{S}_3$  pour la loi de composition.

#### Exercice 2 –

- 1) On considère dans  $\mathfrak{S}_5$  les permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer  $\sigma_1^{-1}$ ,  $\sigma_2^{-1}$ ,  $\sigma_1\sigma_2$  et  $\sigma_2\sigma_1$ .
- 2) Même question avec  $\tau_1 = (1 \ 3 \ 4)$  et  $\tau_2 = (1 \ 2 \ 5 \ 3)$ .
  - 3) Écrire  $\tau_1^{-1}$  sous la forme  $\tau_1^k$  et  $\tau_2^{-1}$  sous la forme  $\tau_2^l$  où  $k$  et  $l$  sont des entiers strictement positifs. Y a-t-il unicité de  $k$  et  $l$  ?
  - 4) Même question avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

#### Exercice 3 – On considère ici des permutations de $\mathfrak{S}_8$ .

- 1) Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Décomposer  $\sigma$  en produit de cycles à supports disjoints.
- 2) Même question avec  $\tau = (1 \ 3 \ 5 \ 6) (2 \ 5 \ 4) (3 \ 7 \ 2 \ 8 \ 1)$ .
  - 3) Calculer  $\sigma^{2016}$  et  $\tau^{2016}$ .
  - 4) Quel est l'ordre de  $\sigma$  ? Quel est celui de  $\tau$  ?

**Exercice 4 – Généralisons.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation différente de l'identité, dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est  $c_1 c_2 \cdots c_r$  (où  $r \geq 1$ ). Notons  $l_i \geq 2$  la longueur du cycle  $c_i$ .

- 1) Exprimer l'ordre de  $\sigma$  en fonction des  $l_i$ .
- 2) Donner un exemple de permutation de  $\mathfrak{S}_{12}$  d'ordre 15.
- 3) Combien y a-t-il de telles permutations dans  $\mathfrak{S}_{12}$  ?
- 4) Quel est l'ordre maximal d'un élément de  $\mathfrak{S}_8$  ?  $\mathfrak{S}_{12}$  ?  $\mathfrak{S}_{15}$  ?

**Exercice 5** – On note  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on note  $g_\sigma$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  qui à  $e_i$  associe  $e_{\sigma(i)}$  pour tout  $i$ .

- 1) Montrer que  $g_\sigma$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Quelle est sa matrice  $M_\sigma$  dans  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  ?
- 2) Montrer que si  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ , alors  $M_{\sigma\tau} = M_\sigma M_\tau$ .
- 3) Montrer que pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a  $\det M_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ .

**Exercice 6** –

- 1) Soient  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ . On dit que  $\tau$  est une conjuguée de  $\sigma$  s'il existe  $\gamma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\tau = \gamma\sigma\gamma^{-1}$ . Montrer que dans  $\mathfrak{S}_n$  la relation “est une conjuguée de” est une relation d'équivalence. Ceci permet de parler désormais de permutations conjuguées.
- 2) Montrer que, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et si  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sont  $k \geq 2$  éléments deux à deux distincts de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , alors

$$\sigma(a_1 a_2 \dots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k)).$$

- 3) Quelles sont les permutations conjuguées de l'identité ? Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation différente de l'identité dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est  $c_1 c_2 \dots c_r$  (où  $r \geq 1$ ). Notons  $l_i \geq 2$  la longueur du cycle  $c_i$ . Montrer que  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  et  $\sigma$  sont conjuguées si et seulement si  $\tau$  admet une décomposition en produit de cycles à supports disjoints de la forme  $c'_1 c'_2 \dots c'_r$  où  $c'_i$  est de longueur  $l_i$  pour tout  $i$ .
- 4) Combien de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  commutent avec  $(1 \ 2 \ \dots \ n)$  ? Avec  $(1 \ 2 \ \dots \ k)$  où  $2 \leq k \leq n$  ?

**Exercice 7** – Soit  $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de signature 1.

- 1) Déterminer  $\mathfrak{A}_3$ .
- 2) Montrer que  $\mathfrak{A}_n$  est l'ensemble des produits d'un nombre pair de transpositions.
- 3) Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  une permutation différente de l'identité dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est  $c_1 c_2 \dots c_r$  (où  $r \geq 1$ ). Notons  $l_i \geq 2$  la longueur du cycle  $c_i$ . À quelle condition portant sur les  $l_i$  a-t-on  $\sigma \in \mathfrak{A}_n$  ?
- 4) Quel est le cardinal de  $\mathfrak{A}_n$  ? *Indication* : on pourra considérer l'application  $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  définie par  $f(\sigma) = (1 \ 2)\sigma$ .

**Exercice 8** –

- 1) Montrer que  $(1 \ 2), (1 \ 3), \dots, (1 \ n)$  engendrent  $\mathfrak{S}_n$ .
- 2) Montrer que  $(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n)$  engendrent  $\mathfrak{S}_n$ .
- 3) Montrer que  $(1 \ 2)$  et  $(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$  engendrent  $\mathfrak{S}_n$ .
- 4) Montrer que si  $n \geq 3$ , les cycles de longueur 3 engendrent  $\mathfrak{A}_n$ .
- 5) Montrer que si  $n \geq 3$ ,  $(1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 4), \dots, (1 \ 2 \ n)$  engendrent  $\mathfrak{A}_n$ .
- 6) Montrer que les cycles de longueur  $n$  engendrent  $\mathfrak{S}_n$  si  $n$  est pair, et qu'ils engendrent  $\mathfrak{A}_n$  si  $n$  est impair.