Université de Bordeaux **Algèbre 3**
Licence de Sciences et Technologies
2015-2016

Devoir surveillé

11 mars 2016, Durée 1h30
Documents non autorisés.

Exercice 1. Soit G l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ où a parcourt l'ensemble des nombres complexes **non nuls**.

1 1. Montrer que le produit matriciel définit une loi de composition interne sur G.

Si a et b sont deux nombres complexes non nuls, $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix}$ appartient à G.

1 2. Déterminer une matrice E dans G vérifiant la propriété :

$$\forall A \in G, AE = EA = A.$$

D'après la question précédente, la matrice $E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ remplit les conditions demandées.

2 3. Montrer que G, muni du produit matriciel, est un groupe abélien.

Le produit est une loi de composition interne et on dispose d'un élément neutre E. Il reste à vérifier que la loi est commutative, ce qui est clair d'après le calcul effectué à la première question, et que chaque élément admet un inverse, ce qui résulte de la formule

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1} \\ a^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4E$$

moyennant quoi l'élément $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1} \\ a^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix}$.

1 4. À quelle condition sur a l'élément $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ est-il d'ordre fini dans G ?

Une récurrence immédiate montre que $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n a^n & 2^n a^n \\ 2^n a^n & 2^n a^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour que $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ soit d'ordre fini est qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $(2a)^n = 1$, c'est-à-dire que $2a$ soit une racine de l'unité.

Exercice 2.

4 1. Dans S_6, on considère le cycle

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)\,.$$

Déterminer la décomposition en cycles à supports disjoints des permutations σ^2, σ^3, σ^4 et σ^5.

$$\begin{array}{rcl} \sigma^2 & = & (135)(246) \\ \sigma^3 & = & (14)(25)(36) \\ \sigma^4 & = & (153)(264) \\ \sigma^5 & = & \sigma^{-1} = (165432) \end{array}$$

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Dans S_n, on considère le n-cycle $\gamma = (1\,2\,\ldots\,n)$.

2 (a) Déterminer $\gamma^k(1)$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et en déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\gamma^k(1) = 1 \Leftrightarrow n \text{ divise } k.$$

Clairement, on a $\gamma^k(1) = 1 + k$ pour k compris entre 0 et $n-1$ et γ^n est égale à l'identité. Par conséquent, si k est un entier quelconque, et r le reste de sa division euclidienne par n ($k = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$), on a

$$\gamma^k(1) = \gamma^{nq+r}(1) = (\gamma^n)^q \circ \gamma^r(1) = \gamma^r(1) = 1 + r,$$

qui vaut 1 si et seulement si $r = 0$, c'est-à-dire si et seulement si n divise k.

2 (b) Soit ℓ un entier naturel non nul. On note d le PGCD de ℓ et de n. Déduire de la question précédente que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on a

$$\gamma^{\ell m}(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{n}{d} \text{ divise } m.$$

Écrivons $\ell = d\ell'$, $n = dn'$ avec ℓ' et n' premiers entre eux. On a alors, en vertu du résultat précédent :

$$\begin{array}{rcl} \gamma^{\ell m}(1) = 1 & \Leftrightarrow & n \text{ divise } \ell m \\ & \Leftrightarrow & dn' \text{ divise } d\ell' m \\ & \Leftrightarrow & n' \text{ divise } \ell' m \\ & \Leftrightarrow & n' \text{ divise } m \text{ puisque } \ell' \wedge n' = 1 \textit{ (lemme de Gauss)} \end{array}$$

ce qui est bien la conclusion attendue puisque $n' = \dfrac{n}{d}$.

1 (c) Montrer que γ^ℓ est un n-cycle si et seulement si ℓ est premier à n.

Le résultat précédent montre que l'orbite de 1 sous l'action de γ^ℓ a pour cardinal $\frac{n}{d}$, où $d = \ell \wedge n$. Pour que γ^ℓ soit un n-cycle, il est donc nécessaire et suffisant que $\frac{n}{d} = n$, c'est-à-dire $d = 1$.

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ des nombres complexes non nuls est un groupe pour la multiplication (on ne demande pas de le redémontrer). Pour tout entier naturel n non nul, on définit

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

2 1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, U_n est un sous-groupe cyclique de $\mathbb{C}^\times$.

Clairement U_n est non vide (il contient 1) et pour tout couple (x, y) d'éléments de U_n, on a $(xy^{-1})^n = x^n y^{-n} = 1$, donc xy^{-1} appartient à U_n. Donc U_n est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$

2 2. Déterminer tous les sous-groupes de U_{12}.

U_{12} est cyclique d'ordre 12, engendré par $\rho = e^{\frac{2i\pi}{12}} = e^{\frac{i\pi}{6}}$. Ses sous-groupes sont cycliques, et ils sont en bijection avec les diviseurs de 12. On trouve

— un sous groupe d'ordre 1 : $\{1\}$

— un sous groupe d'ordre 2 : $\langle \rho^6 \rangle = \{1, -1\}$

— un sous groupe d'ordre 3 : $\langle \rho^4 \rangle = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$

— un sous groupe d'ordre 4 : $\langle \rho^3 \rangle = \{1, -1, i, -i\}$

— un sous groupe d'ordre 6 : $\langle \rho^2 \rangle = \left\{1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, -1, -e^{\frac{i\pi}{3}}, -e^{\frac{2i\pi}{3}}\right\}$

— Un sous-groupe d'ordre 12 : U_{12}.

2 3. Montrer que si H est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$, il existe un entier naturel non nul n tel que $H = U_n$.

[Indication : *On commencera par montrer que si H est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$, il existe N tel que $H \subset U_N$*]

Si H est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$, alors tous ses éléments son d'ordre fini (sinon, s'il contenait un élément d'ordre infini, il contiendrait le sous-groupe infini qu'il engendre, ce qui est absurde). Si N désigne le *ppcm* des ordres des éléments de H, on a clairement $x^N = 1$ pour tout x dans H, puisque N est un multiple commun de l'ordre de tous les éléments de H. En particulier, H est contenu dans U_N dont il est par conséquent un sous-groupe. Comme U_N est cyclique, la description des sous-groupes d'un groupe cyclique vue en cours permet d'affirmer que H est lui-même cyclique et qu'il existe un diviseur d de N tel que

$$H = \left\{x \in U_N \mid x^d = 1\right\}$$

ce qui signifie précisément que

$$H = U_d.$$