université de BORDEAUX	**Année universitaire 2015-2016** S1 DE PRINTEMPS **Parcours :** Mathématiques Fondamentales / Mathématiques et Informatique — **Code UE :** N1MA4W11 **Épreuve :** **Algèbre 3** 3 mai 2016 : 14h (durée : 3h) *Documents interdits* Responsable de l'épreuve : Renaud Coulangeon	**Collège Sciences et Technologies**

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Dans toute la suite, le cardinal d'un ensemble fini E est noté $|E|$.

Exercice 1. Soit G un groupe fini d'élément neutre e dont la loi de groupe est notée multiplicativement.

1. Montrer que si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G d'ordres a et b, et si a et b sont premiers entre eux, alors $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. En déduire que l'application

   $$\begin{array}{ccc} H_1 \times H_2 & \longrightarrow & G \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 x_2 \end{array}$$

   est injective et que le cardinal de G est supérieur ou égal à ab.

2. Montrer que si H est un sous-groupe de G d'ordre p premier, alors H est cyclique, engendré par n'importe lequel de ses éléments différents de e.

3. Si p est un nombre premier, et si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes d'ordre p de G, montrer qu'on a l'alternative

   $$H_1 \cap H_2 = \{e\} \text{ ou } H_1 = H_2.$$

   En déduire que si G contient deux sous-groupes d'ordre p distincts, alors il contient au moins p^2 éléments.

4. On suppose désormais que G est d'ordre 35. On se propose de montrer qu'il contient nécessairement au moins un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

   (a) Justifier ce fait quand G est cyclique.

   On suppose dans la suite que G *n'est pas cyclique*.

   (b) En utilisant la question 3, montrer que G contient au moins un élément d'ordre 5.

   (c) Supposons, par l'absurde, que G ne contienne, hormis l'élément neutre, que des éléments d'ordre 5. Montrer qu'on a alors

   $$|G| = 4k + 1$$

   où k désigne le nombre de sous-groupes d'ordre 5 dans G.
   Conclure à une contradiction.

Exercice 2. On rappelle que $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est muni d'une structure d'anneau pour les lois $+$ et $\cdot$ définies par

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
- $(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$

et que les éléments neutres pour ces deux lois sont respectivement $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

1. Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \text{ est pair } \}$.
   (a) Montrer que $(H, +)$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{Z}^2, +)$.
   (b) Montrer que l'application
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 2y - x) \end{array}$$
   est un isomorphisme de groupes.

2. Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose
   $$A_d = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv y \mod d\right\}.$$
   (a) Montrer que A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
   (b) Déterminer, en fonction de $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_d^\times$ des inversibles de A_d.
   (c) Les anneaux A_2 et A_3 sont-ils isomorphes ?

3. Inversement, si A est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$, on pose
   $$K = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } (x, 0) \in A\}.$$
   (a) Montrer que K est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
   (b) En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $K = d\mathbb{Z}$ et que $A = A_d$.

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 inversibles est un groupe pour le produit matriciel, d'élément neutre la matrice identité.

Soit G l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Soit n un entier naturel. On pose $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Montrer que H est un sous-groupe normal (ou distingué) de G.

3. Montrer que pour tout élément $g = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in G$ il existe un unique entier $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ et un unique élément h de H tels que
$$g = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} h.$$
En déduire l'ordre du groupe G/H.

4. (a) Exhiber un élément x d'ordre 2 et un élément y d'ordre n dans G/H qui soient tels que
$$xyx = y^{-1}.$$
   (b) Montrer que G/H est isomorphe au groupe diédral D_{2n} des isométries d'un polygone régulier à n sommets.