Contrôlabilité de systèmes linéaires paraboliques couplés avec contrainte de positivité sur l'état

Pierre Lissy

CEREMADE, Université Paris-Dauphine

ANR TRECOS
12 Mars 2021

Système considéré

Système de n EDP linéaires paraboliques couplées avec condition au bord de Neumann et m contrôles internes

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t Y - D\Delta Y & = AY + BU\mathbf{1}_\omega & \text{sur } (0,T)\times\Omega, \\ \partial_{\vec{n}} Y & = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ Y(0,\cdot) & = Y_0(\cdot) & \text{sur } \Omega. \end{array}\right. \tag{PL}$$

- Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, ω est un ouvert inclus dans Ω ;
- D est une matrice diagonale $n \times n$ à coefficients strictement positifs.
- A est une matrice $n \times n$, B est une matrice $n \times m$.

But : généraliser au cas système le résultats pour l'équation de la chaleur scalaire de Lohéac-Trélat-Zuazua'17 (M3AS) :existence en temps long de contrôles permettant d'aller d'une condition initiale strictement positive à une condition finale strictement positive.

Hypothèse de travail

Contrôlabilité

$(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vp ordonnées de $-\Delta$ ($\lambda_0 = 0$).
Ammar-Khodja-Benabdallah-González-Burgos-de-Teresa'09 (JEE) :
contrôlabilité aux trajectoires $\Leftrightarrow$ condition de Kalman spectrale :

$$\mathrm{rank}\left[(-\lambda_p D + A)^{n-1}B \mid \ldots \mid B\right] = n,\ \forall p \in \mathbb{N}. \tag{Kal}$$

Maintien de la positivité

A est quasipositive, c'est-à-dire

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} \geqslant 0.$$

Alors :

$$Y_0 \geqslant 0 \Rightarrow \tilde{Y}(t, \cdot) \geqslant 0. \tag{Pos}$$

où $\tilde{Y}$ est la solution libre de (PL) (avec $U = 0$).

Un contre-exemple relativement élémentaire

Un cas cascade :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_{xx} y_1 & = y_2 & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_t y_2 - \partial_{xx} y_2 & = -y_2 + \mathbf{1}_\omega u & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_x Y(0) = \partial_x Y(1) & = 0, & \\ Y(0,\cdot) & = Y^0(\cdot) & \text{in } (0,1). \end{cases}$$

La matrice de couplage est bien quasi-positive.

- Si on exige $y_2 \geqslant 0$, alors $\int_0^1 y_1$ est croissante quel que soit u.
- Toute trajectoire libre $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ est telle que $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ vérifie l'équation de la chaleur et donc conservation de l'intégrale en temps.
- La trajectoire libre issue de $(1,1)$ reste positive par quasi-positivité et on a donc en tout temps $0 < \int_0^1 \tilde{y}_1(t,\cdot) \leqslant \int_0^1 (\tilde{y}_1(t,\cdot) + \tilde{y}_2(t,\cdot)) = 2$.
- Si on part par exemple de $(3,1)$, l'intégrale de la première composante est toujours $\geqslant 3$. C'est incompatible.

Un non contre-exemple

Quasiment le même cas cascade :

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t y_1 - \partial_{xx} y_1 & = y_2 & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_t y_2 - \partial_{xx} y_2 & = \mathbf{1}_\omega u & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_x Y(0) = \partial_x Y(1) & = 0, & \\ Y(0,\cdot) & = Y^0(\cdot) & \text{in } (0,1). \end{array}\right.$$

On verra qu'on saura maintenir la positivité dans ce cas.
Si on met des diffusions différentes par contre : si $d_1 \neq d_2$,

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t y_1 - d_1\partial_{xx} y_1 & = y_2 & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_t y_2 - d_2\partial_{xx} y_2 & = \mathbf{1}_\omega u & \text{sur } (0,T)\times(0,1), \\ \partial_x Y(0) = \partial_x Y(1) & = 0, & \\ Y(0,\cdot) & = Y^0(\cdot) & \text{in } (0,1). \end{array}\right.$$

alors je ne sais ni répondre par l'affirmative, ni par la négative.

Déjà des problèmes ouverts

Problème ouvert 1

A donnée initiale fixée, quel type de contraintes mettre sur les états finaux pour assurer l'existence de contrôles maintenant la positivité ? D'abord dans le cas $D = Id$, cascade avec un contrôle ?

Problème ouvert 2

Peut-on au moins donner des propriétés générales de contrôle partiel, parfois suffisantes dans les applications ? D'abord dans le cas $D = Id$, cascade avec un contrôle ?

Un premier remède : relaxer l'hypothèse de positivité

Théorème

Supposons qu'on a (Pos) *et* (Kal). *Soit* Y^{f} *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)^n$ *une solution libre de* (PL) *avec* $U = 0$, *partant de* $Y^{\mathrm{f},0}$ *dans* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n$, *et soit* Y^0 *dans* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n$. *Supposons que*

$$Y^0 \geqslant 0,\, Y^{\mathrm{f},0} \geqslant 0.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $T > 0$ *et* $U \in L^\infty(\omega_T)^m$ *tels que la solution* Y *de* (PL) *avec condition initiale* Y^0 *et contrôle* U *vérifie*

$$Y(T,\cdot) = Y^{\mathrm{f}}(T,\cdot),$$

et, pour tout t *dans* $[0, T]$,

$$Y(t,\cdot) \geqslant -\varepsilon.$$

Preuve

Deux ingrédients clé :

- D'une part existence de contrôles suffisamment réguliers (classique, utiliser votre méthode préférée)

$$\|U\|_{\mathrm{L}^\infty(\omega_T)^m} \leqslant C_s(T)\|Y_0 - Y_0^f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^n}. \qquad \text{(Cost)}$$

- D'autre part,

$$\forall t \in [0, T], \|Y(t) - \tilde{Y}(t)\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n} \leqslant C(T)\|U\|_{\mathrm{L}^\infty(\omega)^m}, \qquad \text{(WP)}$$

où $\tilde{Y}$ est la solution libre associée à Y^0. On met bout à bout (Cost) et (WP) :

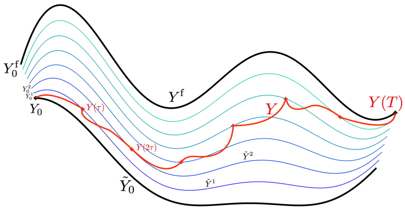
$$\|Y(t) - \tilde{Y}(t)\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n} \leqslant C(T)\|Y_0 - Y_0^f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^n}. \qquad \text{(Estim-1)}$$

Preuve

- Quitte à faire un changement de variable $Y \mapsto e^{\lambda t} Y$ avec $\lambda > 0$ suffisamment grand, on peut supposer que les trajectoires libres issues de Y^0 et $Y^{\mathrm{f},0}$ sont bornées par M.
- Première étape : on définit N états initiaux entre Y^0 et $Y^{\mathrm{f},0}$ et les solutions libres associées, qui sont positives grâce à (Pos) :

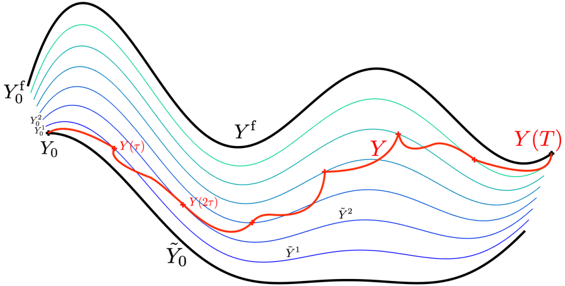
$$Y_k^0 = (1 - \frac{k}{N}) Y^0 + \frac{k}{N} Y^{\mathrm{f},0}.$$

- on choisit N tel que la distance entre deux trajectoires consécutives soit inférieure à $M\delta$ pour un certain $\delta > 0$.



- on va contrôler vers Y^{f} en se déplaçant de trajectoire en trajectoire :

Preuve



À l'étape k, on contrôle en un temps τ en utilisant l'estimation (Estim-1) :

$$\|Y(t,\cdot) - \tilde{Y}_k(t,\cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n} \leqslant C(\tau)\|\tilde{Y}_k(\cdot,k\tau) - \tilde{Y}_{k+1}(\cdot,k\tau)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^n}$$

ce qui donne

$$Y(t,\cdot) \geqslant -C(\tau)M\delta.$$

On choisit alors $\delta = \dfrac{\varepsilon}{MC(\tau)}$.

Une remarque sur le ε

En regardant en détail la preuve, on voit que l'on peut s'en passer si :

- $\tilde{Y}$ and Y^{f} sont globalement bornées
-
$$\zeta = \min\left(\inf_{(\mathbb{R}_+\times\Omega)^n} \tilde{Y}(t,x), \inf_{(\mathbb{R}_+\times\Omega)^n} Y^{\mathrm{f}}(t,x)\right) > 0. \tag{Loin-0}$$

Exemple typique : A antisymétrique.
On peut toujours se ramener au premier cas. Mais si on le fait, on a de très fortes chances de perdre (Loin-0)...
Ce qui pose problème, c'est donc les composantes qui vont naturellement à 0 à des "vitesses" différentes.

Un résultat positif pour $D = I_n$

Théorème

Supposons que $D = I_n$ et que A et B vérifient (Pos) *and* (Kal)*.*
Supposons de plus que la partie réelle de toutes les valeurs propres de A est positive.
Soit Y^0, $Y^{\mathrm{f},0}$ dans $\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n$ et Y^{f} la solution libre de (PL) *partant de $Y^{\mathrm{f},0}$. Supposons que*

$$Y^0 \geqslant 0, \, Y^{\mathrm{f},0} \geqslant 0,$$

et qu'aucune des composantes de Y^0 et $Y^{\mathrm{f},0}$ n'est identiquement nulle p.p. sur Ω.
Alors, il existe $T > 0$ et $U \in L^\infty(\omega_T)^m$ tels que la solution Y de (PL) *avec condition initiale Y^0 et contrôle U vérifie*

$$Y(T, \cdot) = Y^{\mathrm{f}}(T, \cdot),$$

et, pour tout t dans $[0, T]$,

$$Y(t, \cdot) \geqslant 0.$$

Preuve du Théorème 2

Idée principale : changement de variable

$$Z = e^{-tA} Y.$$

pour découpler les équations : on se ramène au système

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t Z - \Delta Z & = e^{-tA} B U \mathbf{1}_\omega & \text{sur } \Omega_T, \\ \partial_{\vec{n}} Z & = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ Z(0,\cdot) & = Y^0(\cdot) & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \tag{PL-DC}$$

Que gagne-t-on ? Les trajectoires libres restent naturellement loin de 0 car cv vers équilibres ((Loin-0) est vrai).
Mais on peut perdre une propriété fondamentale : l'invariance du coût du contrôle par rapport au temps initial.

Preuve du Théorème 2

- Pour utiliser la méthode de l'escalier, on veut une estimation similaire à (Estim-1).

Grâce à (Estim-1) et par définition de Z on a

$$\|Z(t,\cdot)-\tilde{Z}(t,\cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n} \leqslant C(T)e^{-tA}.\|Z^0-Z^{\mathrm{f},0}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^n}.$$

Par hypothèse sur les valeurs propres de A, on a K tel que $e^{-tA} \leqslant K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc on obtient une estimation similaire :

$$\|Z(t,\cdot)-\tilde{Z}(t,\cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n} \leqslant C_1(T)\|Z^0-Z^{\mathrm{f},0}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^n}. \qquad \text{(Estim-2)}$$

avec $C_1(T)$ indépendante du temps initial. Après la même preuve tourne et on vérifie que l'on reste bien positif.

Problèmes ouverts

- Mieux comprendre le cas $D \neq Id$. Cas D non diagonalisable ? Quasi-positivité pas claire...
- Cas du contrôle au bord (Neumann) : souvent plus pertinent pour les applications, mais sauf cas particuliers (1D, cylindres) on ne connait pas de CNS de contrôlabilité.
- Couplages plus complexes : ordre 1, dépendant du temps et/ou de l'espace (même pb que précédemment). Problème à cause de l'absence d'invariance du coût du contrôle par rapport au temps initial ?
- Cas semi-linéaire (scalaire : Pighin-Zuazua MCRF) : la contrôlabilité locale semble peu pertinente ici. Pour la contrôlabilité globale, la linéarisation triviale n'est peut-être pas une bonne méthode (perte de la quasi-positivité), mais peut-être méthode du retour sur des cas particuliers ?

Problèmes ouverts

- Mieux comprendre le cas $D \neq Id$. Cas D non diagonalisable ? Quasi-positivité pas claire...
- Cas du contrôle au bord (Neumann) : souvent plus pertinent pour les applications, mais sauf cas particuliers (1D, cylindres) on ne connait pas de CNS de contrôlabilité.
- Couplages plus complexes : ordre 1, dépendant du temps et/ou de l'espace (même pb que précédemment). Problème à cause de l'absence d'invariance du coût du contrôle par rapport au temps initial ?
- Cas semi-linéaire (scalaire : Pighin-Zuazua MCRF) : la contrôlabilité locale semble peu pertinente ici. Pour la contrôlabilité globale, la linéarisation triviale n'est peut-être pas une bonne méthode (perte de la quasi-positivité), mais peut-être méthode du retour sur des cas particuliers ?

Reference

Pierre Lissy et Clément Moreau, *state-constrained controllability of linear reaction-diffusion systems*, soumis et disponible sur HAL.