DEVOIR À LA MAISON – ANALYSE 3 – MA3002

Exercice 1 : Soit $f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) := (1-x-y)xy$.

a) Prouver que $m := (1/3, 1/3)$ est le seul point critique.

b) Calculer la Hessienne en m et montrer qu'elle est définie négative.

c) Donner la formule de Taylor de f en m à l'ordre 2.

d) Déduire de c) ou de b) (en citant le cours) que f a un maximum local en m.

On cherche maintenant à montrer que m est un maximum global pour f.

e) On fixe maintenant $y \in (0,1)$ et on pose $f_y(x) := f(x,y)$. Résoudre $f_y = 0$.

f) Montrer que $f_y(x) \leq f_y\left(\frac{1-y}{2}\right) = g(y)$, pour tout $x \in (0,1)$ où $g(y) := \frac{1}{4}(1-y)^2 y$.

g) En calculant le maximum de g, montrer que l'on a $f(x,y) \leq 1/27 = f(m)$, pour tous $x, y \in (0,1) \times (0,1)$. Conclure sur la globalité du maximum.

h) Trouver tous les $a, b, c > 0$, tels que $a + b + c = 0$ et abc est maximal.

Exercice 2 : On cherche à calculer la dérivée de

$$f(x) := \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\cos(t^2 x)}{t}\, dt,$$

pour $x > 0$. On pose alors

$$g(x,y) := \int_1^{x^2} \frac{\cos(t^2 y)}{t}\, dt - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(t^2 y)}{t}\, dt,$$

pour $x, y > 0$. On remarque que $f(x) = g(x,x)$.

a) En utilisant le théorême fondamental de l'analyse, calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}$.

b) En précisant un théorême de dérivation sous le signe intégral, calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

c) Montrer que g est différentiable et déduire sa différentielle.

d) En remarquant que f s'écrit comme la composition de g avec une autre fonction, calculer la dérivée de f.

Exercice 3 : Soit $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$.

a) Montrer que f s'étend par continuité en 0.

b) Montrer que f est dérivable en tout point de x (on fera très attention au calcul de la dérivée en 0).

c) Montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0.

d) Construire une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais qui n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$.