Université Bordeaux I **2013-14**
MA3002 Analyse 2

Devoir Surveillé Terminal du 06/01/2014.
Documents non-autorisés, durée: 3 h.

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1. *(Questions 3 et 4 de cet exercice sont indépendantes)*
Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Donner la définition d'une derivée partielle de f au point $x^0 \in O$. L'existence de derivées partielles au point implique-t-elle la différentiabilité de la fonction? Sa continuité? Justifiez avec une démonstration ou un contre-exemple le cas échéant.

2. Donner le critère de l'appartenance de la fonction f à la classe C^1 en termes de ses derivées partielles.

3. Soit
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2+4y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) La fonction g admet-t-elle les derivées partielles en $(0,0)$? Est-elle différentiable à ce point?

4. Soit maintenant
$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3+3y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   (a) Montrer que h est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$ et y calculer sa différentielle.
   (b) Montrer que h est différentiable au point $(0,0)$ et y calculer sa différentielle.
   (c) La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$? Sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?
   (d) Enoncer le résultat du cours sur l'égalité des derivées partielles mixtes d'ordre supérieur (= le théorème de Clairaut).
   (e) Calculer les derivées $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)$ pour $(x,y) \neq 0$. Peut-on appliquer le résultat de la question (d) à ces derivées sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$? Au point $(0,0)$?

Exercice 2. Soit
$$v(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}, \quad u(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z.$$

1. Calculer les points critiques et y préciser le comportement local (maximum local, minimum local, le point selle, etc.) de ces fonctions.

2. * Les points extrémaux du point précédent sont-ils locaux ou globaux?

T.S.V.P.

Exercice 3.*(Equation d'ondes)*
On dit qu'une fonction $U = U(x,t)$ est une solution de l'equation (E) (voir ci-dessous) si la fonction U est définie et 2-fois différentiable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, et, de plus,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t) = 0. \qquad (E)$$

1. Soit U_1 et U_2 deux solutions de (E). Montrer que $U_1 + U_2$ l'est aussi.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer que la fonction
$$U_1(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t))$$
satisfait l'equation (E) ainsi que les conditions initiales $U_1(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}U_1(x,0) = 0$.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que la fonction
$$U_2(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$$
satisfait l'equation (E) ainsi que les conditions initiales $U_2(x,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}U_2(x,0) = g(x)$.
4. En utilisant deux questions précédentes, construire une solution de (E) satisfaisant les conditions initiales $U(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}U(x,0) = g(x)$.

Exercice 4. Soit Γ une courbe dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$x(t) = t\sin t, \quad y(t) = t\cos t, \quad z(t) = t, \quad t \in [0,\pi].$$

Calculer sa longueur.

FIN