Université Bordeaux I **2011-2012**
Analyse 2 (MA3002)

DEVOIR SURVEILLÉ FINAL
DU 5 JANVIER 2012

Documents non autorisés, durée : 3 h.

NB : vos réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1.

1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ des domaines (= des ouverts connexes) et $f : \Omega \to \Omega_1$ et $g : \Omega_1 \to \mathbb{R}^{d_2}$ des applications différentiables. Enoncer le théorème sur la différentiabilité de la composition (la règle de la chaine) pour

$$F(x) = g \circ f(x)(= g(f(x))), \quad x \in \Omega.$$

2. Dans ce qui suit, $d_1 = d, d_2 = 1$ et $\Omega_1 = \mathbb{R}^d$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$, soit

$$g(y) = ||y||^2 = \langle y, y \rangle = y^t \cdot y.$$

L'application g est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^d$? Si oui, donner sa différentielle.

3. Considérons l'application F définie ci-dessus pour g indiquée et f de la question 1.
   – Etudier la différentiabilité de l'application F est donner sa différentielle *en utilisant la définition* de la différentiabilité.
   – La même question à l'aide du théorème sur la différentiabilité de la composition, cf. la question 1.

   Indication : votre réponse doit dépendre de f et de Df.

Exercice 2. On définie la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$F(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Après avoir justifié leur existence, calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et pour $(x,y) = (0,0)$.

TSVP

3. En utilisant un résultat du cours (énoncez-le !), étudier la différentiabilité de F en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4.* L'application F est-elle 2 fois différentiable au point $(0, 0)$? Est-elle 2 fois différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Est-elle de la classe $\mathcal{C}^2$ sur ce dernier domaine ?

Exercice 3.

1. Trouver les points critiques de l'application et déterminer leur nature (minimum local, maximum local, point selle) :

$$h(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x},$$

   où $x > -1$, $y > -1$.

2. Dans cette partie de l'exercice, on étudie la fonction

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y^3}{3} + xy.$$

   (a) Expliquer pourquoi $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.
   (b) Donner le développement de Taylor de f en $(0, 0)$ à l'ordre 2.
   (c) Trouver les points critiques de f.
   (d) Déterminer la nature de ses points critiques.
   (e) La fonction f a-t-elle un minimum ou un maximum global ?

Exercice 4. Dans cet exercice, on se propose d'étudier la courbe paramétrée définie par

$$\mathcal{C} := \begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1 \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Faire le tableau des variations pour $x'(t), x(t), y'(t)$ et $y(t)$.
2. Etudier les branches infinies de la courbe : la courbe admet-elle des asymptotes ?

3.* Trouver et étudier les points stationnaires de la courbe.

4. Faire le tracé de la courbe en s'aidant de résultats des questions précédents.

Exercice 5. Calculer la longueur de la courbe :

$$t \mapsto (\cos^2(t), \sin^2(t)), \quad \text{pour} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

FIN