Université de Bordeaux

TMQ302 : Fonctions de plusieurs variables

Feuille d'exercices N. 3 : Continuité, différentiabilité, dérivées partielles

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application telle que

- pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- il existe $c > 0$ tel que pour tous $x, y, y' \in \mathbb{R}$, $|f(x, y) - f(x, y')| \leqslant c|y - y'|$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et A une partie de $\mathbb{R}^d$, on pose $d_A(x) = d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.

(1) montrer que $|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x - y\|$ et que d_A est une application uniformément continue.

(2) Montrer que si A est fermée, un élément x de $\mathbb{R}^d$ appartient à A si et seulement si $d_A(x) = 0$.

(3) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^d$.

a) Montrer que $O = \{x \in \mathbb{R}^d,\ d(x, A) < d(x, B)\}$ est un ouvert.

b) Montrer que si A et B sont des fermés disjoints, il existe des ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

c) Construire dans ce cas une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ égale à 0 sur A et égale à 1 sur B

Exercice 3. Soit $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $f(0, 0) = 0$.

(1) f est-elle continue en $(0, 0)$?

(2) Montrer que pour toute courbe indéfiniment dérivable $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0) = (0, 0)$, ayant en $t = 0$ une tangente géométrique non parallèle aux axes Ox, Oy, la restriction $f_{|\gamma}$ est continue en $t = 0$. (On rappelle que la tangente géométrique à γ en $t = 0$ est dirigée par la première dérivée non nulle $\gamma^{(p)}(0)$, si elle existe.)

Exercice 4. (Théorème de d'Alembert)

Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, de degré $n \geqslant 1$. On veut montrer que P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

(1) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $|z| > r \Rightarrow |P(z)| > |P(0)|$. En déduire que $\inf_{\mathbb{C}} |P| = \inf_{\overline{D}(0,r)} |P|$ (où $\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r\}$). Justifier l'existence d'un $z_0 \in \overline{D}(0, r)$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{\mathbb{C}} |P|$.

(2) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ et une constante $a \neq 0$ tels que $P(z_0 + w) = P(z_0) + aw^k + o(w^k)$ quand $w \to 0$.

(3) En déduire que si on avait $P(z_0) \neq 0$, il existerait $w \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z+w)| < |P(z)|$. (On pourra écrire $w = \rho e^{i\theta}$, choisir d'abord ρ, puis θ.) Conclure.

Exercice 5. **(Différentiabilité)**
Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables sur leur domaine de définition et calculer leur différentielle :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x^2z - 2xy, z^3 - xyz)$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y \sin x, \cos x)$.

Exercice 6.
(1) Montrer que toute application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et donner sa différentielle.
(2) Montrer que toute application bilinéaire $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et donner sa différentielle.
(3) Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^n$ n'est jamais différentiable en 0. Donner un exemple de norme différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Est-ce le cas de toute norme ?

Exercice 7. Soit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $\varepsilon_x : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varepsilon_x(f) = f(x)$ ("évaluation" en x) est différentiable en tout point f et calculer sa différentielle.
(2) Montrer que l'application $(\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$, $(X_1, X_2) \mapsto \det(X_1, X_2)$ est différentiable en tout point (X_1, X_2) et calculer sa différentielle.
(3) Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ on appelle $\det(f)$ le déterminant de la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ ainsi définie est différentiable en tout point f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et calculer sa différentielle.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 9.
(1) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant x^2 - xy + y^2$.
(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, où p, q sont des entiers $\geqslant 1$. Pour quelles valeurs de p, q cette fonction est-elle continue ?
(3) Montrer que si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle en ce point est nulle. En déduire que f est différentiable en $(0,0)$ *ssi* $p + q \geqslant 4$.

Exercice 10. **(Dérivées partielles)** Justifier l'existence des dérivées partielles premières des fonctions suivantes, et les calculer :
(i) $f(x,y) = e^x \cos y$; (ii) $g(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$; (iii) $h(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) f est-elle continue en $(0,0)$?

(2) f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

(3) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 12. **(Dérivées directionnelles)**

(1) Montrer que toute application différentiable admet une dérivée dans toutes les directions.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y}$ si $x^2+y \neq 0$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Montrer que f admet une dérivée dans toutes les directions en $(0,0)$ mais qu'elle n'y est pas continue (on pourra considérer $x \mapsto f(x, -x^2+x^3)$).

(3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x$ si $y = 0$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Montrer que f est continue en $(0,0)$, qu'elle y admet des dérivées dans toutes les directions, mais qu'elle n'y est pas différentiable.

Exercice 13. **(Dérivées selon des chemins)** Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Montrer que pour toute courbe dérivable $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma'(0) \neq 0$ et $\gamma(t) = (0,0) \Leftrightarrow t = 0$, $f \circ \gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 14. **(Jacobiennes)** Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par $f(x,y,z) = (x^2+y^2, xyz)$, $g(u,v) = (uv, u^2v^2, e^v)$. Calculer les matrices jacobiennes de $f \circ g$ et $g \circ f$.