Université de Bordeaux — 2017-2018

TMQ302U — Fonctions de plusieurs variables

Devoir Surveillé du 24/10/2017.

Documents non-autorisés, durée: 1h 20.

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1.

1. Donner la définition d'un ouvert et d'un fermé dans $\mathbb{R}^d$.
2. Donner un exemple d'ouvert et un exemple d'un fermé dans $\mathbb{R}^d$. Donner un exemple d'un ensemble qui n'est ni ouvert, ni fermé.
3. Soit $A, B \subset \mathbb{R}^d$ deux ensembles. On pose

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

   (a) Soit A et B ouverts. Montrer que $A + B$ est ouvert.

   (b) Soit A fermé et B compact. L'ensemble $A + B$ est-il fermé? compact?

Exercice 2.

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble et $f : A \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application définie sur A.

   (a) Donner la définition de la continuité uniforme de f sur A.

   (b) Soit $A = K$ un compact. Que peut-on dire de la continuité uniforme de f sur K?

   Justifiez vos réponses en vous référant aux résultats du cours.

2. *Application:* soit $K = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, et

$$f(x, y) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} : K \to \mathbb{R}_+$$

   une fonction. Démontrez que f est uniformément continue sur K.

TSVP

Exercice 3.

1. L'application $(x, y) \mapsto |5x+7y|$ définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifiez votre réponse.

2. Démontrez que
$$||(x, y)||' = 3|x| + |y|$$
est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinez la boule $B'(0, 1)$ (= la boule centré au point (0,0) de rayon 1 par rapport à la norme $||.||'$)

3. Trouver des constantes $C_1, C_2 > 0$ (pas nécessairement optimales) telles que
$$||z|| \leqslant C_1||z||', \quad ||z||' \leqslant C_2||z||$$
pour tout $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit
$$f(x, y) = \begin{cases} (4x^2 - y^2)/(x^2 + 3y^2), & (x, y) \neq 0 \\ a, & (x, y) = 0 \end{cases} .$$

Indiquer la valeur $a \in \mathbb{R}$ telle que:

1. f soit continue suivant la droite d'équation $x = 0$; f soit continue suivant la droite d'équation $y = 0$.

2. f soit continue au point (0,0) suivant la droite $y = bx, b \in \mathbb{R}$.

3. Est-il possible de choisir la valeur a de sorte que l'application f soit continue au point (0,0) (en tant qu'une fonction de deux variables)?

FIN