SUR DEUX PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE : REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FONDAMENTAUX ET EXTENSION DE CLASSES DE COHOMOLOGIE

par

Vincent KOZIARZ

Mémoire présenté en vue d'obtenir le
Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenu le 19 novembre 2010 devant le jury composé de

Rapporteurs

Bo BERNDTSSON	Université de Göteborg
Marc BURGER	ETH Zürich
Philippe EYSSIDIEUX	Institut Fourier, Grenoble

Examinateurs

Daniel BARLET	Institut Élie Cartan, Nancy
Frédéric CAMPANA	Institut Élie Cartan, Nancy
Pierre PANSU	Université Paris-Sud, Orsay
Mihai PĂUN	Institut Élie Cartan, Nancy

Je remercie sincèrement Bo Berndtsson, Marc Burger et Philippe Eyssidieux d'avoir accepté de rapporter sur mes travaux, ainsi que Pierre Pansu d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance à Julien Maubon qui est bien plus qu'un collaborateur pour moi, et à qui je dois beaucoup, ainsi qu'à Bruno Klingler et Ngaiming Mok avec qui j'ai eu le grand plaisir de travailler au cours de ces dernières années.

Je voudrais ensuite exprimer ma profonde gratitude envers plusieurs membres de l'équipe d'Analyse et Géométrie Complexes de l'Institut Élie Cartan. Je pense à Daniel Barlet, Frédéric Campana et Mihai Păun qui me font par ailleurs le plaisir de participer au jury, ainsi qu'à Benoît Claudon. J'ai aussi une pensée pour Yannis Varouchas.

Je n'oublie pas non plus les autres personnes que j'apprécie et côtoie quotidiennement à l'IECN, en particulier Stéphane Gaussent et Régine Marchand, tous deux dotés d'une bonne humeur quasiment inaltérable, et Oussama Hijazi.

Enfin, j'adresse un grand merci à Emmanuelle.

Table des matières

PUBLICATIONS

Travaux non présentés

VINCENT KOZIARZ – *Annulation de la cohomologie pour les fibrés semi-positifs,* C. R. Acad. Sci. Paris **327**, 1998, 143-148

DANIEL BARLET ET VINCENT KOZIARZ – *Fonctions holomorphes sur l'espace des cycles : la méthode d'intersection,* Math. Res. Lett. **7**, 2000, 537-549

VINCENT KOZIARZ ET FRÉDÉRIC SARKIS – *Problème du bord dans les variétés q-convexes et phénomène de Hartogs-Bochner,* Math. Ann. **321**, 2001, 569-585

FRÉDÉRIC CAMPANA, VINCENT KOZIARZ ET MIHAI PĂUN – *Numerical character of the effectivity of adjoint line bundles,* à paraître aux Ann. Inst. Fourier

Travaux présentés

VINCENT KOZIARZ ET JULIEN MAUBON – *Harmonic maps and representations of non-uniform lattices of* $\mathrm{PU}(m, 1)$, Ann. Inst. Fourier **58**, 2008, 507-558

VINCENT KOZIARZ ET JULIEN MAUBON – *Representations of complex hyperbolic lattices into rank 2 classical Lie groups of Hermitian type,* Geom. Dedicata **137**, 2008, 85-111

VINCENT KOZIARZ ET NGAIMING MOK – *Nonexistence of holomorphic submersions between complex unit balls equivariant with respect to a lattice and their generalizations,* Amer. J. Math. **132**, 2010, 1347-1363

VINCENT KOZIARZ ET JULIEN MAUBON – *The Toledo invariant on smooth varieties of general type,* à paraître dans J. Reine Angew. Math.

VINCENT KOZIARZ – *Extensions with estimates of cohomology classes,* à paraître dans Manuscripta Math.

BRUNO KLINGLER, VINCENT KOZIARZ ET JULIEN MAUBON – *On the second cohomology of Kähler groups,* à paraître dans Geom. Funct. Anal.

INTRODUCTION

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour objet l'étude des variétés kählériennes sous différents aspects. La majeure partie des résultats est centrée sur les groupes fondamentaux de ces variétés (groupes dits kählériens) et la rigidité de leurs représentations linéaires, avec un accent particulier sur les réseaux de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Les techniques requises pour ces questions reposent essentiellement sur la théorie des fibrés de Higgs par Simpson et plus spécifiquement les systèmes de fibrés de Hodge, tout en exploitant les propriétés géométriques et topologiques des (quotients des) domaines symétriques bornés, ainsi que des domaines de périodes.

Le principal autre problème que nous considérons dans ce texte est celui de l'extension des classes de cohomologie, par exemple dans une famille de variétés kählériennes, à la manière d'Ohsawa-Takegoshi. Nous l'appréhendons de manière classique, à savoir par les méthodes L^2. Bien que ce problème soit en apparence déconnecté des thèmes précédents de par la nature des outils et des résultats visés, le lien peut se faire à travers les variations de structures de Hodge traitées dans les travaux de Griffiths.

Nous avons choisi de ne pas aborder ici nos travaux durant la thèse et dans la période qui a directement suivi. En effet, bien qu'étant également du domaine de l'analyse et de la géométrie complexes (étude de la q-pseudoconvexité et construction de fonctions holomorphes sur l'espace des cycles de Barlet), ils sont thématiquement assez éloignés de nos préoccupations actuelles.

Dans cette introduction, nous donnons un bref aperçu de notre travail présenté dans un ordre essentiellement chronologique.

Notre point de départ pour l'étude des représentations linéaires des groupes kählériens est le constat que les réseaux du groupe des biholomorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ de la boule unité $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{C}^n$ sont les seuls parmi les réseaux de tous les domaines symétriques bornés à ne pas être en général superrigides au sens de Margulis. A la suite de travaux de Toledo et Corlette, puis de Burger-Iozzi, le but de notre premier papier en collaboration avec Maubon a été de montrer qu'un certain type de représentations — dites standard — des réseaux de $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^m)$ étaient malgré tout rigides. La preuve de ce résultat s'appuie sur les propriétés d'un invariant initialement défini par Toledo, dont on prouve qu'il vérifie une inégalité de type Milnor-Wood, puis on caractérise les cas d'égalité pour en déduire la rigidité escomptée.

On peut trivialement étendre la définition de l'invariant de Toledo aux représentations des réseaux de $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ à valeurs dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ des biholomorphismes d'un domaine symétrique borné $\mathcal{D}$ quelconque. Bien que l'invariant vérifie encore une inégalité de type Milnor-Wood, comme montré par Burger et Iozzi, la caractérisation des cas d'égalité

— et la rigidité censée en résulter — est beaucoup plus difficile à obtenir lorsque $\mathcal{D}$ est de rang supérieur. Ainsi, dans le deuxième article avec Maubon, n'avons-nous pu traiter que les cas où $\mathcal{D}$ est de rang au plus 2 (à une exception près). Ces restrictions drastiques ne sont cependant pas étonnantes, au vu de problèmes de même nature déjà rencontrés par Klingler, Reznikov et d'autres dans des situations similaires.

Les techniques employées pour les preuves ne sont pas propres aux espaces symétriques mais utilisent plutôt des notions de géométrie algébrique, telles que la stabilité de certains fibrés et fibrés de Higgs émanant des représentations. Aussi est-il naturel d'essayer d'étendre les résultats précédents aux groupes fondamentaux des variétés projectives voire kählériennes. Il s'avère que le bon cadre est celui des variétés projectives de type général, mais la première difficulté réside déjà dans la définition même de l'invariant de Toledo. A l'aide des progrès récents dans le Programme du Modèle Minimal, nous avons surmonté cette difficulté, puis avons généralisé nos résultats aux représentations des groupes fondamentaux des variétés de type général.

Dans un dernier travail, nous nous sommes intéressés avec Klingler et Maubon à une conjecture de Carlson-Toledo selon laquelle le deuxième groupe de cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Q}$ d'un groupe kählérien infini devrait être non nul. Cette conjecture semble hors de portée par les techniques actuelles mais on dispose de moyens pour l'aborder si l'on suppose que le groupe en question a des représentations linéaires non triviales, ce qui nous ramène aux considérations précédentes. Nous avons obtenu des résultats partiels qui vont dans le sens de la conjecture en utilisant les applications des périodes associées aux représentations rigides, mais nous avons aussi montré qu'il peut y avoir des obstructions à mettre en œuvre cette méthode dans le cas (linéaire) général. Ces obstructions résident dans l'existence de 2-sphères "horizontales" non homotopiquement triviales dans les domaines de périodes, existence que nous avons prouvée dans de nombreux cas par une application du h-principe de Gromov.

Parallèlement, nous avons continué à nous intéresser aux représentations des réseaux de $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^m)$, et plus particulièrement celles induites par des applications holomorphes entre quotients. Motivés par une question de Siu, nous avons montré avec Mok qu'il n'existe pas de submersions holomorphes entre de tels quotiens de la boule si $n > m$. Ce résultat n'est pas suprenant mais n'était connu auparavant que pour $n = 2$ et $m = 1$. Il encourage par ailleurs à une étude plus approfondie des applications holomorphes surjectives entre quotients de boules.

Enfin, comme nous l'avons déjà dit, dans une autre partie de notre travail indépendante au moins au niveau des techniques employées, nous nous sommes intéressés à une généralisation du théorème d'Ohsawa-Takegoshi pour les $(0, q)$-formes. En fait, sous des hypothèses de positivité standard, nous avons montré que l'on peut étendre des $(0, q)$-classes de cohomologie à valeurs dans le fibré canonique tordu par un fibré en droites, d'une hypersurface lisse compacte à la variété ambiante si cette dernière est kählérienne faiblement pseudoconvexe, avec en outre un contrôle de la norme L^2 de l'extension. Nous en déduisons par exemple l'invariance de la dimension des $(0, q)$-groupes de cohomologie à valeurs dans le fibré canonique tordu par un fibré semi-positif sur une famille de variétés kählériennes compactes.

La première partie du texte ci-après ne reprend que des résultats classiques. Elle nous permet de faire quelques rappels sur les espaces symétriques (hermitiens), de donner quelques motivations à nos travaux, et surtout de nous attarder sur quelques outils fondamentaux pour la suite, à l'instar des applications pluriharmoniques et des fibrés de Higgs attachés aux représentations linéaires.

Dans les parties qui suivent, nous détaillons les résultats évoqués dans cette introduction, en tentant de donner les idées principales impliquées dans les démonstrations, et en proposant quelques questions et pistes.

PARTIE I
ESPACES SYMÉTRIQUES DE TYPE NON COMPACT

Nous renvoyons aux livres d'Helgason [**He**] et Eberlein [**Eb**] pour les généralités sur les espaces symétriques (de type non compact).

1. Superrigidité archimédienne

Soit $(\mathcal{X}, g)$ un espace symétrique irréductible de type non compact. Il est difféomorphe à un quotient du type G/K où G est un groupe de Lie simple (ce qui signifie pour nous que son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est simple) de type non compact et de centre fini (par exemple la composante connexe de l'identité $\mathrm{Isom}_0(\mathcal{X})$ de son groupe d'isométries) et $K \subset G$ un compact maximal. Réciproquement, pour un tel G et un tel K, $\mathcal{X} = G/K$ est un espace symétrique irréductible de type non compact.

Si $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ est la décomposition de Cartan correspondante de l'algèbre de Lie de G, l'espace tangent à $\mathcal{X}$ en un point s'identifie à $\mathfrak{p}_0$, la métrique g est (à une constante près) la restriction de la forme de Killing $\langle\, ,\, \rangle$ de $\mathfrak{g}_0$ à $\mathfrak{p}_0$ et la courbure sectionnelle est donnée, via l'identification, par $R(\xi, \eta, \xi, \eta) = -\langle [\xi, \eta], [\xi, \eta] \rangle \leq 0$. Un espace symétrique de type non compact est contractile, sa métrique g est complète Einstein. Son rang (réel) est par définition la dimension d'un plat maximal de l'espace tangent en un point. C'est aussi ce que l'on appelle communément le rang réel de G.

Définition 1.1. — *Soient $(\mathcal{X}, g)$ un espace symétrique comme ci-dessus. Un réseau Γ de G (ou de $\mathcal{X}$) est un sous-groupe discret de G, sans torsion, tel que la variété $X := \Gamma\backslash G/K = \Gamma\backslash\mathcal{X}$ munie de la métrique riemannienne induite par g est de volume fini (on dit aussi que Γ est de covolume fini). On dit que Γ est cocompact ou uniforme si X est compacte.*

L'hypothèse sur la torsion de Γ n'est pas restrictive car tout réseau admet un sous-groupe sans torsion d'indice fini.

Définition 1.2. — *Soient G un groupe de Lie simple de type non compact, Γ un réseau de G et H un groupe de Lie semi-simple. Une représentation de Γ dans H est un morphisme de groupes.*

L'étude des représentations des réseaux des groupes de Lie a donné lieu à une littérature abondante. Un des points culminants de la théorie a été le théorème de superrigidité de Margulis (voir par exemple [**Mar**]) dont nous donnons ici un cas particulier :

Théorème 1.3 **(Margulis).** — *Dans la situation de la définition précédente, on suppose en outre que l'espace symétrique $\mathcal{X}$ associé à G est de rang au moins 2, que $\rho : \Gamma \to H$ est une représentation Zariski dense et que G et H sont à centre trivial. Alors ρ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\rho} : G \to H$.*

Comme c'est le seul type de rigidité qui nous intéressera, nous dirons que G (ou $\mathcal{X}$) est superrigide (nous ne parlerons pas de superrigidité non archimédienne). Notons que les espaces symétriques $\mathcal{X}$ qui échappent à cet énoncé (et qui sont donc ceux de rang 1) sont les espaces hyperboliques, resp. hyperboliques complexes, hyperboliques quaternioniens et le plan de Cayley, associés à $G = \mathrm{PO}(n,1)$, resp. $G = \mathrm{PU}(n,1)$, $G = \mathrm{PSp}(n,1)$ et au groupe exceptionnel $G = F_4^{-20}$.

L'outil principal de Margulis pour montrer ce théorème est la théorie ergodique mais il peut aussi être appréhendé de manière géométrique. C'est ce point de vue qui nous intéressera, aussi donnons-nous quelques détails. Le lecteur désireux d'en savoir plus pourra consulter l'article de Pansu [**Pa1**] dont nous reprenons en partie la présentation.

2. Superrigidité géométrique

Soient X et Y deux variétés riemanniennes munies de leurs connexions de Levi-Civita ∇^X et ∇^Y. On note R^X et R^Y leurs tenseurs de courbure respectifs. Soit $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(Y)$ un homomorphisme du groupe fondamental de X (où on a fixé un point base dans X) dans le groupe des isométries de Y. On note $\tilde{X}$ le revêtement universel de X. Une application ρ-équivariante $f : \tilde{X} \to Y$ est une application qui vérifie $f(\gamma x) = \rho(\gamma) f(x)$ pour tout $x \in \tilde{X}$ et tout $\gamma \in \pi_1(X)$.

Si $f : \tilde{X} \to Y$ est une application ρ-équivariante de classe C^2, sa différentielle df descend sur X en une section du fibré $\mathrm{Hom}(T_X, f^\star T_Y)$, lui-même muni de la connexion ∇ induite par ∇^X et ∇^Y (car $\pi_1(X)$ agit sur Y par isométries). Comme les connexions de Levi-Civita sont sans torsion, ∇df est un 2-tenseur symétrique sur X à valeurs dans $f^\star T_Y$.

La superrigidité géométrique s'appuie sur l'existence d'applications ρ-équivariantes privilégiées, à savoir les applications harmoniques.

Définition 2.1. — *On dit que f est harmonique si elle vérifie l'équation d'Euler-Lagrange* $\mathrm{tr}\,\nabla df = 0$ *(où* tr *désigne la trace calculée au moyen de la métrique sur X). On dit que f est totalement géodésique si* $\nabla df = 0$.

Une application f est totalement géodésique si et seulement si elle envoie toute géodésique de la source dans une géodésique de l'arrivée.

On dispose d'un théorème d'existence des applications harmoniques, valable dans une très grande généralité, et dû à Corlette [**Co2**] (généralisant un théorème de Eells-Sampson) :

***Théorème 2.2* (Corlette).** — *Soient X une variété riemannienne complète et Y une variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle. Soit $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(Y)$ une représentation telle que l'action induite par $\pi_1(X)$ sur la sphère à l'infini de Y n'a pas de point fixe (ρ est alors dite réductive). S'il existe une application ρ-équivariante d'énergie finie du revêtement universel $\tilde{X}$ de X dans Y, alors il existe une application harmonique ρ-équivariante d'énergie finie de $\tilde{X}$ dans Y.*

Précisons que l'énergie de f est donnée par $E(f) = \frac{1}{2}\int_X |df|^2 dV_X$ où $|df|$, calculée à partir des métriques riemanniennes sur X et Y, est bien définie sur X. Une fois que l'on dispose d'une application harmonique, on chercher à montrer qu'elle vérifie des propriétés additionnelles (typiquement, qu'elle est totalement géodésique). Pour ce faire, on utilise une formule de type Bochner. La version que nous présentons ici est celle de [**MSY**].

Soit Q un tenseur de type courbure sur X (vu comme un (3,1)-tenseur). On définit le 2-tenseur $\overset{\circ}{Q}\,\nabla df$ à valeurs dans $f^\star T_Y$ par $(\overset{\circ}{Q}\,\nabla df)(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{tr}(\xi_3 \mapsto \nabla df(Q(\xi_3, \xi_1)\xi_2, \xi_3))$ (où la trace est prise à l'aide de la métrique sur X), et de façon évidente le 3-tenseur $df \circ Q$ à valeurs dans $f^\star T_Y$.

***Proposition 2.3* (Mok-Siu-Yeung).** — *Soient X et Y deux variétés riemanniennes. On suppose de plus que X est compacte ou que $X = \Gamma\backslash\mathcal{X}$, avec Γ réseau d'un espace symétrique irréductible de type non compact $\mathcal{X}$. Soient $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(Y)$ une représentation et $f : \tilde{X} \to Y$ une application ρ-équivariante d'énergie finie. Si Q est un tenseur de courbure parallèle sur X, on a*

$$\int_X \langle \overset{\circ}{Q}\,\nabla df, \nabla df\rangle dV_X = \frac{1}{2}\int_X \Big[\langle Q, f^\star R^Y\rangle - \langle df \circ Q, df \circ R^X\rangle\Big] dV_X.$$

Cette formule se montre assez facilement par intégration par parties lorsque X est compacte. Dans le cas $X = \Gamma\backslash\mathcal{X}$, avec Γ non uniforme, on intègre par parties sur des compacts de plus en plus grands et on montre que l'on peut faire tendre le terme de bord vers zéro. On utilise pour cela des fonctions "cut-off" adaptées (i.e. à dérivées d'ordres 1 et 2 bien contrôlées) dont l'existence sur les quotients de volume fini des espaces symétriques est garantie par [**CG**].

Avant de poursuivre, rappelons comment on définit la courbure sectionnelle complexifiée de Y. On commence par étendre le tenseur de courbure R^Y à $T_Y^{\mathbb{C}} := T_Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par $\mathbb{C}$-linéarité. On dit que la courbure sectionnelle complexifiée de Y est négative ou nulle si pour tous $\xi, \eta \in T_Y^{\mathbb{C}}$, $R^Y(\xi, \eta, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \leq 0$. Les espaces symétriques de type non compact vérifient cette propriété car dans ce cas, $R^Y(\xi,\eta,\bar{\xi},\bar{\eta}) = -\langle[\xi,\eta],[\bar{\xi},\bar{\eta}]\rangle$ si on identifie $T_Y^{\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Nous pouvons maintenant citer la version géométrique du théorème de superrigidité due à Mok, Siu et Yeung [**MSY**] :

Théorème 2.4 **(Mok-Siu-Yeung)**. — *Soit $\mathcal{X}$ un espace symétrique irréductible de type non compact qui n'est ni un espace hyperbolique, ni un espace hyperbolique complexe. Soient Γ un réseau de $\mathcal{X}$ et Y une variété riemannienne à courbure sectionnelle (resp. à courbure sectionnelle complexifiée si $\mathcal{X}$ est de rang 1) négative ou nulle. Soit $\rho : \Gamma \to$ $\mathrm{Isom}(Y)$ une représentation dans le groupe des isométries de Y et $f : \mathcal{X} \to Y$ une application harmonique ρ-équivariante d'énergie finie. Alors f est soit constante, soit une isométrie (à renormalisation près) totalement géodésique.*

Pour prouver ce théorème, Mok, Siu et Yeung procèdent au cas par cas, en utilisant la classification des espaces symétriques, pour exhiber un tenseur parallèle de type courbure Q qui remplit les conditions suivantes sur $\mathcal{X}$:

(i) $\mathring{Q} \gg 0$ sur tous les 2-tenseurs symétriques de trace nulle,
(ii) $\langle Q, R^X\rangle = 0$,
(iii) $\langle Q, T\rangle \leq 0$ pour tout tenseur de type courbure T à courbure sectionnelle (resp. complexifiée si $\mathcal{X}$ est de rang 1) négative ou nulle.

En utilisant que $\mathcal{X}$ est symétrique irréductible, on montre que $\langle df \circ Q, df \circ R^X\rangle$ est égal (à une constante multiplicative près) à $\langle Q, R^X\rangle |df|^2 = 0$. Ensuite, en appliquant la proposition 2.3, on obtient immédiatement que si f n'est pas constante, elle est totalement géodésique.

A l'aide du théorème 2.2, on déduit une nouvelle version du théorème 1.3.

Corollaire 2.5 **(Mok-Siu-Yeung)**. — *Soit $\mathcal{X}$ un espace symétrique irréductible de type non compact qui n'est ni un espace hyperbolique, ni un espace hyperbolique complexe. Soient Γ un réseau uniforme de $G = \mathrm{Isom}_0(\mathcal{X})$ et $\mathcal{Y}$ un espace symétrique irréductible de type non compact. Soit $\rho : \Gamma \to H = \mathrm{Isom}_0(\mathcal{Y})$ une représentation Zariski dense. Alors ρ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\rho} : G \to H$.*

En effet, comme $X = \Gamma\backslash\mathcal{X}$ est compacte, il existe une application ρ-équivariante d'énergie finie et comme l'image de ρ est Zariski dense, elle ne fixe pas de point à l'infini. On peut donc appliquer le théorème d'existence de Corlette et par le théorème 2.4, l'application harmonique est une isométrie totalement géodésique. On en déduit alors facilement que ρ s'étend à G (voir [**Co2**, th. 4.1]).

Remarquons que ce théorème ne couvre que le cas des réseaux cocompacts. En effet, le problème de l'existence d'une application ρ-équivariante d'énergie finie est en général délicat pour les réseaux non uniformes. Cependant, il apparaît par la méthode géométrique que la superrigidité archimédienne est encore valide pour les espaces hyperboliques quaternioniens et le plan de Cayley (même dans le cas non uniforme comme l'a montré Corlette [**Co2**] en prouvant l'existence d'applications équivariantes d'énergie finie dans ce contexte, cf. théorème 6.4 plus loin), ce qui échappait à la méthode de Margulis.

Pour compléter ce panaroma de la superrigidité, nous avons

Théorème 2.6. — *Les groupes* $\mathrm{PO}(n,1)$ *et* $\mathrm{PU}(n,1)$ *ne sont pas superrigides.*

Il s'avère que les réseaux de $\mathrm{PO}(n,1)$ peuvent être assez "flexibles". On peut par exemple utiliser la méthode dite de "pliage" pour déformer non trivialement certains réseaux de l'espace hyperbolique de dimension n plongé totalement géodésiquement dans l'espace hyperbolique de dimension $n+1$ (voir par exemple [**Th**]).

Quant aux espaces hyperboliques complexes, Mostow [**Mos**] et Toledo [**To3**] ont exhibé des paires (Γ_1, Γ_2) (en nombre fini) de réseaux cocompacts de $\mathrm{PU}(2,1)$, et des homomorphismes $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ surjectifs et de noyau infini, ce qui contredit clairement la superrigidité. Il existe aussi des exemples qui montrent que $\mathrm{PU}(3,1)$ n'est pas superrigide mais pour $n \geq 4$, on sait très peu de choses. Ceci illustre une des difficultés de l'étude des réseaux de $\mathrm{PU}(n,1)$, à savoir la rareté des exemples explicites qui par ailleurs sont souvent obtenus au prix d'efforts considérables (voir [**Mos, DM**] par exemple).

Enfin, bien que n'étant pas superrigides, les espaces hyperboliques complexes conservent certaines propriétés de rigidité. Nous reviendrons très largement sur cet aspect qui a motivé une grande partie des travaux exposés dans ce mémoire.

3. Compléments sur les espaces symétriques hermitiens

Les espaces symétriques qui nous intéresseront seront hermitiens non compacts. Nous renvoyons aux livres de Mok [**Mok1**] et Satake [**Sat**] pour les détails.

Soit $(\mathcal{D}, g_{\mathcal{D}})$ un espace symétrique hermitien de type non compact. Rappelons que cela signifie qu'il peut être muni d'une structure complexe J telle que la métrique $g_{\mathcal{D}}$ soit hermitienne (i.e. J-invariante). Dans ce cas, $g_{\mathcal{D}}$ est automatiquement kählérienne et on notera $\omega_{\mathcal{D}}$ la $(1,1)$-forme réelle fermée associée. La composante connexe de l'identité du groupe des isométries est en outre incluse dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ des biholomorphismes de $\mathcal{D}$. La courbure sectionnelle holomorphe de $\mathcal{D}$ est strictement négative, pincée entre -1 et $-\frac{1}{\mathrm{rg}\,\mathcal{D}}$, quitte à multiplier la métrique par une constante positive.

La métrique $g_{\mathcal{D}}$ induit sur le fibré canonique $K_{\mathcal{D}}$ une métrique à courbure strictement positive. Ceci entraîne en particulier qu'un quotient de $\mathcal{D}$ par un réseau cocompact est une variété projective.

Rappelons le théorème suivant qui justifie l'appellation classique de “domaines symétriques bornés” pour les espaces symétriques hermitiens de type non compact.

***Théorème 3.1* (Harish-Chandra).** — *Tout espace symétrique hermitien de type non compact $\mathcal{D}$ est biholomorphe à un domaine convexe borné de $\mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}}$.*

Pour les espaces symétriques hermitiens, la superrigidité se manifeste également de façon métrique :

***Théorème 3.2* (Mok, To).** — *Soit $(\mathcal{D}, g_{\mathcal{D}})$ un espace symétrique hermitien irréductible de type non compact de rang au moins 2 et $X = \Gamma\backslash\mathcal{D}$ un quotient de $\mathcal{D}$ par un réseau. Alors toute métrique hermitienne sur X de courbure semi-négative au sens de Griffiths est proportionnelle à $g_{\mathcal{D}}$.*

Voici maintenant un exemple d'espace symétrique hermitien qui nous intéressera particulièrement.

Exemple 3.3. — *L'espace symétrique associé à* $\mathrm{PU}(p,q)$. Dans ce texte, nous supposerons toujours que $p \geq q \geq 1$. Rappelons d'abord la définition de $\mathrm{PU}(p,q)$. On considère sur $\mathbb{C}^{p+q}$ la forme hermitienne h de signature (p,q) définie dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_{p+q})$ par $h(z) = \sum_{i=1}^{p} |z_i|^2 - \sum_{i=1}^{q} |z_{p+i}|^2$. Le groupe $\mathrm{SU}(p,q)$ est le sous-groupe de $\mathrm{SL}(p+q,\mathbb{C})$ constitué des éléments qui préservent h. Le groupe $\mathrm{PU}(p,q)$ est l'image de $\mathrm{SU}(p,q)$ dans $\mathrm{PSL}(p+q,\mathbb{C})$. Le noyau est fini donc ces deux groupes sont très semblables. En particulier, leurs algèbres de Lie sont isomorphes, simples. Cependant, suivant les situations, il sera plus commode de considérer que notre espace symétrique est associé à l'un ou à l'autre. Par exemple, l'action de $\mathrm{PU}(p,q)$ sur l'espace symétrique est effective, contrairement à celle de $\mathrm{SU}(p,q)$ mais par ailleurs, $\mathrm{SU}(p,q)$ agit sur $\mathbb{C}^{p+q}$ ce qui n'est pas vrai pour $\mathrm{PU}(p,q)$.

L'espace symétrique $\mathcal{D}$ associé à $\mathrm{SU}(p,q)$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbb{C}^{p+q}$ de dimension q sur lesquels h est définie-négative. C'est un ouvert de la grassmannienne complexe $G_{\mathbb{C}}/Q$ des q-plans de $\mathbb{C}^{p+q}$ (où $Q \subset G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(p+q,\mathbb{C})$ est le sous-groupe parabolique maximal qui stabilise $\mathbb{W} = \langle e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}\rangle$), et son rang en tant qu'espace symétrique est q. Lorsque $q = 1$, $\mathcal{D}$ est l'espace hyperbolique complexe de dimension p que nous noterons $\mathbb{B}^p$. Le groupe $G = \mathrm{SU}(p,q)$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$ par biholomorphismes et le sous-groupe d'isotropie K de G en $\mathbb{W}$ s'identifie au sous-groupe compact maximal $\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ de $\mathrm{SU}(p,q)$, de sorte que l'on peut identifier $\mathcal{D}$ à $G/K \simeq \mathrm{SU}(p,q)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$. On note $\mathbb{V} = \langle e_1, \ldots, e_p\rangle$ le h-orthogonal de $\mathbb{W}$.

Nous avons la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G : $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$. Sa complexifiée se décompose alors en $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n} \oplus \tau(\mathfrak{n})$ où $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre nilpotente maximale, $\mathfrak{q} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de Q et τ est la conjugaison par rapport à la forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{k}_0$. En tant que fibré holomorphe, nous voyons $T_{\mathcal{D}}$ comme un fibré vectoriel de fibre $\mathfrak{g}/\mathfrak{q} \simeq \tau(\mathfrak{n})$. Mais en tant que fibré C^∞, nous voyons plutôt $T_{\mathcal{D}}^{\mathbb{R}}$ comme le fibré associé au K-fibré principal $G \to \mathcal{D}$ par la représentation adjointe de K sur $\mathfrak{p}_0$. Le complexifié $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{p}_0$ admet une décomposition $\mathfrak{p} = \tau(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{p}^{1,0} \oplus \mathfrak{p}^{0,1} \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ à laquelle correspond la décomposition du complexifié du tangent réel $T_{\mathcal{D}}^{\mathbb{C}} = T_{\mathcal{D}}^{1,0} \oplus T_{\mathcal{D}}^{0,1}$.

Si on identifie le tangent holomorphe $T_{\mathcal{D},o}$ en un point $o \in \mathcal{D}$ à $\mathrm{Hom}(\mathbb{W}, \mathbb{V}) \simeq M_{p,q}(\mathbb{C})$, la métrique G-invariante est donnée par $g_{\mathcal{D}}(A, B) = 4\mathrm{tr}\left({}^t\bar{B}A\right)$ où $A, B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, et la courbure sectionnelle holomorphe de la droite complexe engendrée par $A \neq 0$ vaut

$$-\frac{\mathrm{tr}\left(({}^t\bar{A}A)^2\right)}{\left(\mathrm{tr}\left({}^t\bar{A}A\right)\right)^2}.$$

Cette formule montre que la courbure sectionnelle holomorphe sur $\mathcal{D}$ est bien pincée entre -1 and $-1/q$ où q est le rang de $\mathcal{D}$. En outre, elle vaut $-1/q$ si et seulement si les vecteurs colonnes de A sont deux à deux orthogonaux et de même norme (pour le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}^p$). La métrique $g_{\mathcal{D}}$ est Kähler-Einstein et avec notre normalisation, son tenseur de Ricci est $-\frac{p+q}{2}\, g_{\mathcal{D}}$.

Enfin, par le plongement de Harish-Chandra, $\mathcal{D}$ s'identifie biholomorphiquement au domaine borné de $M_{p,q}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{pq}$, $\{Z \in M_{p,q}(\mathbb{C})\ ,\ I_q - {}^t\bar{Z}Z \gg 0\}$. Dans le cas particulier où $q = 1$, $\mathcal{D} = \mathbb{B}^p$ se réalise donc comme la boule unité de $\mathbb{C}^p$.

4. Pluriharmonicité et fibrés de Higgs

Pour terminer, donnons une autre application, très importante pour nous, de la proposition 2.3 (voir Siu [**Siu1**] et Sampson [**Sam**]). Dans la suite, on étend $df : T_X^{\mathbb{C}} \to f^\star T_Y^{\mathbb{C}}$ par $\mathbb{C}$-linéarité et, si X est une variété complexe, on note $d'f$, resp. $d''f$, sa restriction à $T_X^{1,0}$, resp. $T_X^{0,1}$.

***Théorème 4.1* (Sampson).** — *Soient X une variété kählérienne compacte ou un quotient d'un domaine symétrique borné par un réseau, et Y une variété riemannienne à courbure sectionnelle complexifiée négative ou nulle. Soit $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(Y)$ une représentation dans le groupe des isométries de Y et $f : \tilde{X} \to Y$ une application harmonique ρ-équivariante. Alors f est pluriharmonique (i.e. la partie de type $(1,1)$ de ∇df est nulle) et de plus, la courbure sectionnelle complexe de Y est nulle sur l'image de $d'f$ et $d''f$.*

Cette fois, on utilise que sur toute variété kählérienne X, il existe un tenseur parallèle Q (explicite) tel que

(i) $\langle \mathring{Q}\ \nabla df, \nabla df\rangle = |(\nabla df)^{(1,1)}|^2$,
(ii) $\langle Q(\cdot,\cdot,\cdot,\xi), R^X(\cdot,\cdot,\cdot,\eta)\rangle = 0$ pour tous $\xi, \eta \in T_X$,

(iii) $\langle Q, f^\star R^Y\rangle = -2\,\mathrm{Scal}_{\mathbb{C}}(f^\star R^Y) := -2\sum_{i,j=1}^n f^\star R^Y(\xi_i,\xi_j,\bar\xi_i,\bar\xi_j)$ où $\{\xi_i\}$ est une base orthonormée de $T_X^{1,0}$.

Ce théorème a une autre interprétation en termes de fibrés de Higgs qui nous intéressera particulièrement. Ce point de vue a d'abord été développé par Hitchin pour les courbes, puis par Simpson [**Sim1**].

Supposons que l'on ait une variété kählérienne compacte X et une représentation réductive $\rho : \pi_1(X) \to G \subset \mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$ avec G groupe de Lie semi-simple de type non compact. Soit $K \subset G$ un compact maximal. D'après ce qui précède, on a une application ρ-équivariante pluriharmonique $f : \tilde X \to G/K$. Le groupe G agit sur $\mathbb{C}^r$ et la représentation ρ définit un fibré plat E de rang r sur X. L'application f induit une réduction du groupe de structure de E à K, ce qui revient à se donner une métrique sur E. La connexion plate D sur E se décompose en types $D = (\partial + \theta) + (\bar\partial + \bar\theta)$, où $\partial + \bar\partial$ est la composante de D qui préserve la métrique. En outre, le fibré $f^\star T^{\mathbb{C}}_{G/K}$ s'identifie à un sous-fibré de $\mathrm{End}(E)$, la connexion naturelle sur $f^\star T^{\mathbb{C}}_{G/K}$ est celle induite par $\partial + \bar\partial$, et la $(1,0)$-forme θ (resp. la $(0,1)$-forme $\bar\theta$) à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$ s'identifie à $d'f$ (resp. $d''f$).

En gardant à l'esprit le fait que la courbure sur G/K est induite par le crochet sur l'algèbre de Lie de G, le théorème 4.1 dit alors exactement que $\bar\partial^2 = 0$ (car $[\bar\theta,\bar\theta] = 0$), $\bar\partial\theta + \theta\bar\partial = 0$ (car $(\nabla df)^{(1,1)} = 0$) et $[\theta,\theta] = 0$, ou encore que $\bar\partial$ définit une structure holomorphe sur E, θ est une section holomorphe de $\Omega^1_X(\mathrm{End}(E))$ et $[\theta,\theta] = 0$: ces données définissent un fibré de Higgs sur X.

Enfin, par la formule de Chern-Weil, il est facile de voir que E est polystable pour n'importe quel choix de polarisation par une forme de Kähler ω sur X. C'est pour nous l'occasion de faire quelques rappels sur les différentes notions de stabilité.

Notions de stabilité pour les fibrés de Higgs

Soit ω une forme de Kähler sur X et (E,θ) un fibré de Higgs de rang r sur X. Pour tout sous-faisceau cohérent saturé $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X(E)$, nous notons $c_1(\mathcal{F}) \in H^2(X,\mathbb{R})$ sa première classe de Chern. Le degré de $\mathcal{F}$ (calculé par rapport à la polarisation donnée par ω) est par définition $\deg(\mathcal{F}) := \int_X c_1(\mathcal{F}) \wedge \omega^{n-1}$, et sa pente est $\mu(\mathcal{F}) := \frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}$ s'il est de rang positif.

On dit que E est un fibré de Higgs *semi-stable* si pour tout $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X(E)$ de rang positif et θ-invariant, i.e. tel que $\theta(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F} \otimes \Omega^1_X$, on a $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(E)$. On dit que E est *stable* si l'inégalité est stricte pour tout $\mathcal{F}$ de rang strictement inférieur à $r = \mathrm{rg}\,E$. Enfin, E est dit *polystable* s'il est somme directe de fibrés stables de même pente. Pour, cette dernière propriété, il revient au même de dire que E est semi-stable, et que si $0 < \mathrm{rg}\,\mathcal{F} < r$ est θ-invariant et vérifie $\mu(\mathcal{F}) = \mu(E)$, alors $\mathcal{F}$ est localement libre et E se scinde holomorphiquement : $E = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$.

Les notions classiques de stabilité de fibrés vectoriels correspondent au cas où $\theta = 0$, c'est-à-dire que l'on compare la pente de tous les sous-faisceaux cohérents de E sans restriction, à celle de E.

Les fibrés de Higgs que nous considérerons seront plats, puisque provenant de représentations. C'est pour cette raison qu'il est facile de voir qu'ils sont polystables pour tout choix de polarisation.

PARTIE II
REPRÉSENTATIONS DES RÉSEAUX DE $\mathrm{PU}(n,1)$ DANS $\mathrm{PU}(m,1)$

Les espaces symétriques hermitiens de rang 1 sont les boules unités $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{C}^n$, munies de la métrique de courbure sectionnelle holomorphe constante -1 (que l'on appelle aussi métrique de Poincaré). Nous identifierons cette métrique avec sa forme de Kähler ω_n. La composante connexe de l'identitié du groupe des isométries de $(\mathbb{B}^n, \omega_n)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{PU}(n,1)$ et c'est aussi le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ des biholomorphismes de $\mathbb{B}^n$.

5. Représentations associées à des applications holomorphes

D'après le théorème de Margulis, les espaces symétriques hermitiens de type non compact de rang au moins 2 sont tous superrigides. Par la superrigidité métrique (ou géométrique), les applications holomorphes (donc pluriharmoniques) d'un tel espace symétrique vers une variété kählérienne à courbure semi-négative au sens de Griffiths sont soit constantes, soit des plongements totalement géodésiques.

Les exemples de Mostow-Toledo montrent par ailleurs que $\mathbb{B}^n$ n'est pas superrigide (voir théorème 2.6). En fait, ce phénomène se manifeste à travers des exemples très intéressants d'applications holomorphes. Ils font souvent intervenir les réseaux construits par Deligne-Mostow [**DM**].

Exemple 5.1. — Toledo [**To3**] a montré que les exemples que l'on connaît d'homomorphismes $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ surjectifs de noyau infini entre des réseaux de $\mathbb{B}^2$ (dont le premier a été exhibé par Mostow) étaient induits par des applications holomorphes surjectives entre les quotients $f : \Gamma_1\backslash\mathbb{B}^2 \to \Gamma_2\backslash\mathbb{B}^2$. Ces applications contractent des courbes totalement géodésiques et ramifient également le long de courbes totalement géodésiques.

Exemple 5.2. — Par d'autres méthodes, Livné [**Liv**] a quant à lui construit dans sa thèse des applications holomorphes surjectives de quotients compacts de boules de dimension 2 vers des surfaces de Riemann (uniformisées par $\mathbb{B}^1$). Les fibres singulières de ces applications sont des unions de courbes totalement géodésiques.

Exemple 5.3. — Récemment, Deraux [**Der2**] a également donné un nouvel exemple d'une application holomorphe d'un quotient de dimension 3 vers un quotient de dimension 1. En fait, il cherche les applications holomorphes "évidentes" entre quotients de Deligne-Mostow. De cette façon, il retrouve essentiellement les exemples de Toledo et Livné. Mais il montre aussi qu'il n'existe pas d'applications holomorphes "évidentes" allant d'un quotient de dimension n vers un quotient de dimension m avec $n > m > 1$.

En résumé, les domaines symétriques bornés de rang 1 jouent un rôle très spécial par rapport à ceux de rang supérieur et il semble essentiel de commencer par étudier les applications holomorphes entre leurs quotients pour en compléter notre compréhension. Dans cet esprit, Siu a posé les deux questions suivantes dans [**Siu3**] :

Questions 5.4 **(Siu)**. — Soit $f : \Gamma\backslash\mathbb{B}^n \to \Gamma'\backslash\mathbb{B}^m$ une application holomorphe entre deux quotients de boules par des réseaux uniformes.

(1) Si $m > n > 1$ et si f est un plongement, est-ce que f est une isométrie totalement géodésique ?
(2) Si $n > m$ et f est surjective, est-ce que $m = 1$?

Ces questions suggèrent qu'une forme de rigidité devrait subsister et en effet, un début de réponse positive a été apporté à la première dans [**CM**] :

Théorème 5.5 **(Cao-Mok)**. — *La réponse à la question (1) est positive dans le cadre plus général où f est une immersion et Γ' discret (non nécessairement un réseau), mais à la condition que $m < 2n$.*

La méthode de Cao et Mok ne fournit cependant aucune indication dans le cas $m \geq 2n$ et aucune obstruction à l'existence de contre-exemples ne semble être connue.

Nous nous intéresserons ici à la deuxième question ou plus exactement à une formulation plus faible. Dans [**KMo**], nous considérons une forme "duale" de la première question, dans un cadre équivariant assez général :

Théorème 5.6 **([KMo])**. — *Soient $n \geq m \geq 1$ deux entiers, $\Gamma < \mathrm{PU}(n,1)$ un réseau cocompact, $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(m,1)$ une représentation et $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ une application holomorphe ρ-équivariante submersive (i.e. sa différentielle df est de rang m en tout point de $\mathbb{B}^n$). Alors nécessairement $m = n$ et $f \in \mathrm{PU}(n,1)$.*

Une conséquence immédiate de ce résultat est le

Corollaire 5.7 **([KMo])**. — *Il n'existe pas de fibrations régulières $f : \Gamma\backslash\mathbb{B}^n \to \Gamma'\backslash\mathbb{B}^m$ entre quotients compacts si $n > m \geq 1$.*

Ceci généralise un théorème obtenu par Liu [**Liu**] qui concernait le cas $n = 2$ et $m = 1$. Le corollaire est évidemment loin de répondre à la deuxième question de Siu, mais on constate cependant dans la preuve par l'absurde que la contradiction est plus facilement obtenue pour $m \geq 2$ que pour $m = 1$.

Supposons donc que les hypothèses du théorème 5.6 sont satisfaites. Par Γ-équivariance, un certain nombre d'objets définis sur $\mathbb{B}^n$, tels ω_n, $f^\star\omega_m$, $f^\star T_{\mathbb{B}^m}$ etc, descendent au quotient $X = \Gamma\backslash\mathbb{B}^n$. Nous utiliserons la même notation que sur $\mathbb{B}^n$ pour les désigner.
Etape 1. On montre que f est une submersion riemannienne.

Les fibres de l'application holomorphe ρ-équivariante $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ définissent un feuilletage holomorphe Γ-équivariant sur $\mathbb{B}^n$, donc un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur $\Gamma\backslash\mathbb{B}^n$, dont on déduit une suite exacte de fibrés sur $X : 0 \to T_{\mathcal{F}} \to T_X \to N_{\mathcal{F}} \to 0$.

D'après le théorème de proportionnalité de Hirzebruch, la classe de Chern totale de T_X, resp. $N_{\mathcal{F}} \simeq f^\star T_{\mathbb{B}^m}$, s'exprime simplement en fonction de ω_n, resp. $f^\star\omega_m$. Un calcul direct originellement dû à Feder [**Fe**] donne alors $c_{n-m+1}(T_{\mathcal{F}}) = k\big([f^\star\omega_m - \omega_n]\big)^{n-m+1}$ où $k > 0$, alors que par ailleurs, puisque $T_{\mathcal{F}}$ est de rang $n-m$, on a $c_{n-m+1}(T_{\mathcal{F}}) = 0$.

Cependant, le lemme de Schwarz implique que $f^\star\omega_m \leq \omega_n$ en tout point de X. De ce qui précède, on déduit que sur le supplémentaire orthogonal de $T_{\mathcal{F}}$ dans T_X, $f^\star\omega_m$ et ω_n coïncident i.e. que f est une submersion riemannienne.

Si $m = n$, f est une isométrie locale de $\mathbb{B}^n$ dans elle-même. Mais alors, elle envoie les géodésiques sur des géodésiques, ce qui implique qu'elle est propre et injective. C'est donc un biholomorphisme. Nous supposons donc dorénavant que $n > m$.

Etape 2. Calcul de la courbure de $N_{\mathcal{F}}$ et contradiction.

Le fait que f soit une submersion riemannienne implique que l'on peut calculer la courbure de $N_{\mathcal{F}}$ de deux façons différentes. Tout d'abord, on peut munir $N_{\mathcal{F}}$ de la métrique quotient et un calcul classique de Griffiths permet de calculer la courbure Θ de $N_{\mathcal{F}} \simeq T_{\mathcal{F}}^\perp$ en fonction de la restriction de la courbure de T_X et de la seconde forme fondamentale σ de $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$. Mais comme la submersion f est riemannienne, Θ est aussi le tiré en arrière par df du tenseur de courbure de $\mathbb{B}^m$.

En comparant les deux calculs, on obtient facilement une contradiction si $m \geq 2$. Pour $m = 1$, cela donne que la restriction de $\sigma : T_{\mathcal{F}} \otimes T_{\mathcal{F}} \to N_{\mathcal{F}}$ est partout non dégénérée. Un calcul rapide de classes de Chern donne donc $c_1(T_{\mathcal{F}}) = -\frac{(n-1)}{4\pi}[f^\star\omega_1]$. Mais alors

$$-(n+1)[\omega_n] = 4\pi\, c_1(T_X) = 4\pi(c_1(T_{\mathcal{F}}) + c_1(N_{\mathcal{F}})) = -(n+1)[f^\star\omega_1]$$

ce qui est impossible puisque $\int_X \omega_n^n > 0$ et $\int_X f^\star\omega_1^n = 0$ car $n > 1$. Ceci clôt la démonstration du théorème.

Nous montrons ensuite plusieurs généralisations du théorème 5.6 dans différentes directions. La première concerne les valeurs critiques d'une fibration singulière.

Théorème 5.8 ([**KMo**]). — *Soient $n > m$ et $f : \Gamma\backslash\mathbb{B}^n \to \Gamma'\backslash\mathbb{B}^m$ une application holomorphe surjective entre quotients compacts. Alors, le lieu des valeurs critiques de f rencontre toute courbe compacte de $\Gamma'\backslash\mathbb{B}^m$. En particulier, il contient un diviseur.*

Pour montrer ce théorème, on prend une courbe C (éventuellement singulière) sur $\Gamma'\backslash\mathbb{B}^m$ en supposant qu'elle ne contient pas de valeur singulière et on commence par considérer la restriction à $f^{-1}(C)$ de la suite exacte de fibrés définie par le feuilletage $\mathcal{F}$. Les mêmes arguments que précédemment montrent que $f_{|f^{-1}(C)}$ doit être une submersion riemannienne (pour la métrique restreinte) au-dessus de tous les points lisses de C. Puis des calculs très similaires à ceux du théorème 5.6 sur une fibre non singulière aboutissent à une contradiction.

La deuxième généralisation étend les résultats du théorème 5.6 au cas d'un réseau Γ non uniforme, si $m \geq 2$ (encore une fois, la valeur $m = 1$ semble jouer un rôle particulier).

Théorème 5.9 (**[KMo]**). — *Soient $n \geq m \geq 2$ deux entiers, $\Gamma < \mathrm{PU}(n,1)$ un réseau, $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(m,1)$ une représentation et $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ une submersion holomorphe ρ-équivariante. Alors $m = n$ et $f \in \mathrm{PU}(n,1)$.*

La preuve est la même que pour le théorème 5.6, mis à part que, comme X n'est pas compacte, l'annulation de la classe $[(\omega_n - f^\star\omega_m)^{n-m+1}] \in H^{2(n-m+1)}(X,\mathbb{R})$ n'entraîne pas immédiatement l'annulation du représentant. L'argument supplémentaire repose sur le fait que dans les cusps, la métrique ω_n sur X a une primitive bornée (par rapport à ω_n).

Remarques 5.10. — (1) Le théorème 5.9 est trivialement faux si on ne suppose pas $m \geq 2$. En effet, il suffit de choisir un réseau cocompact $\Upsilon < \mathrm{PU}(1,1)$, de poser $Y = \Upsilon\backslash\mathbb{B}^1$, et de prendre pour X la variété Y à laquelle on retire un nombre fini de points. Il existe alors un réseau $\Gamma < \mathrm{PU}(1,1)$ tel que X est biholomorphe à $\Gamma\backslash\mathbb{B}^1$, mais l'injection $X \hookrightarrow Y$, qui est une submersion, n'est pas une isométrie.
(2) Déjà dans le cas $m = n = 2$, le théorème 5.9 n'est pas trivial. Il implique en particulier qu'un biholomorphisme local entre quotients de la boule, la source étant de volume fini, est nécessairement un revêtement. Ce résultat avait été montré auparavant par Mok (voir [**Mok1**]) par des méthodes beaucoup plus élaborées.

Enfin, une adaptation du théorème de rigidité métrique de Mok permet de montrer, en corollaire des théorèmes 5.6 et 5.9, le

Théorème 5.11 (**[KMo]**). — *Soient $\mathcal{D}$ un espace symétrique hermitien de type non compact (non nécessairement irréductible), Γ un réseau de $\mathcal{D}$, $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(m,1)$ une représentation et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{B}^m$ une submersion holomorphe ρ-équivariante. Supposons que $m \geq 2$ ou que Γ est cocompact. Alors $\mathcal{D}$ est biholomorphe à $\mathbb{B}^m \times \mathcal{D}'$, où $\mathcal{D}'$ est un espace symétrique hermitien de type non compact, et f est la projection naturelle sur $\mathbb{B}^m$ composée avec un élément de $\mathrm{PU}(m,1)$.*

Questions 5.12. — Il reste évidemment beaucoup à faire pour comprendre les applications entre quotients de la boule. Si la construction de nouveaux exemples semble difficile, il nous paraît intéressant d'étudier les propriétés générales des applications surjectives entre quotients de la boule, en particulier dans les cas plus abordables où soit la base est de dimension 1, soit au contraire les fibres sont de dimension 1. Pour débuter, on peut même supposer que l'on a une famille de courbes stables dont l'espace total est uniformisé par une boule (c'est le cas dans l'exemple 5.2). Une des principales questions qui se pose est celle de la présence en général de fibres singulières totalement géodésiques.

Il devrait aussi y avoir un lien étroit avec les travaux récents de Möller, Viehweg et Zuo (voir par exemple [**MVZ**]). Ainsi, les exemples de Livné fibrent-ils tous sur des courbes de Shimura. Est-ce un phénomène général pour des quotients compacts de la boule qui fibrent sur une courbe ?

6. Invariant de Toledo et rigidité

Une fois qu'il a été établi que la superrigidité n'était pas valable pour l'hyperbolique complexe, plusieurs auteurs se sont intéressés aux déformations de représentations particulières dites "standard" : si $\Gamma < \mathrm{SU}(n,1)$ est un réseau et si $m \geq n$, il existe des plongements holomorphes totalement géodésiques de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}^m$ et ces plongements sont équivariants pour un homomorphisme de $\mathrm{SU}(n,1)$ dans $\mathrm{PU}(m,1)$ (la représentation induite sur Γ est alors dite standard). Les premiers résultats sont locaux, dus à Goldman ([**Go**] pour $n=1$) et Goldman-Millson ([**GM**] pour $n \geq 2$) :

Théorème 6.1 **(Goldman, Goldman-Millson)**. — *Soient $\Gamma < \mathrm{SU}(n,1)$ un réseau cocompact et $m \geq n$. Alors les déformations d'une représentation standard sont triviales.*

Dans ce contexte, les déformations sont dites triviales si elles sont $\mathbb{C}$-fuchsiennes i.e. fidèles, discrètes, et stabilisent une copie totalement géodésique de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}^m$ (tout comme une représentation standard).

Peu après dans [**To2**], Toledo a utilisé un invariant numérique (déjà implicitement défini dans [**To1**]) pour démontrer une version globale du théorème précédent lorsque $n=1$. Dans le même temps, Corlette [**Co1**] a traité le cas $n \geq 2$ à l'aide d'un invariant semblable. Commençons par définir l'invariant de Toledo (suivant Burger et Iozzi) dans un cadre plus général qui nous servira ultérieurement :

Si $\Gamma < \mathrm{PU}(n,1)$ est un réseau cocompact et $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ une représentation de Γ dans le groupe des biholomorphismes d'un domaine symétrique borné $\mathcal{D}$, il existe une application ρ-équivariante $f : \mathbb{B}^n \to \mathcal{D}$ (disons de classe C^2) car $\mathcal{D}$ est contractile. La 2-forme $f^\star\omega_{\mathcal{D}}$ descend sur $X = \Gamma\backslash\mathbb{B}^n$ par ρ-équivariance. On définit alors l'invariant de Toledo de ρ par

$$\tau(\rho) := \frac{1}{n\,!}\int_X f^\star\omega_{\mathcal{D}} \wedge \omega_n^{n-1}.$$

Ce nombre (en fait la classe $[f^\star\omega_{\mathcal{D}}] \in H^2(X,\mathbb{R})$) est indépendant du choix de f. On a par ailleurs besoin d'une normalisation pour $\omega_{\mathcal{D}}$: on conservera celle pour laquelle la courbure sectionnelle holomorphe de $\mathcal{D}$ est pincée entre -1 et $-\frac{1}{\mathrm{rg}\,\mathcal{D}}$.

Remarque 6.2. — L'invariant utilisé par Corlette est

$$\tau_n(\rho) := \frac{1}{n\,!}\int_X f^\star \omega_{\mathcal{D}}^n.$$

Si $n \geq 2$, on ne peut généralement pas le relier à l'invariant de Toledo défini par Burger et Iozzi. Par exemple, dans le cas des représentations induites par les exemples de Livné, $\tau(\rho) \neq 0$ car on dispose par construction d'une application holomorphe ρ-équivariante non constante, alors que l'invariant de Corlette est nul car cette même application holomorphe n'est pas de rang maximal. Remarquons que l'on peut aussi définir des invariants "intermédiaires" (pour $1 \leq k \leq n$) :

$$\tau_k(\rho) := \frac{1}{n\,!}\int_X f^\star \omega_{\mathcal{D}}^k \wedge \omega_n^{n-k}$$

qui dans les cas extrêmes correspondent respectivement aux invariants de Toledo et de Corlette. A priori, ils apportent des informations supplémentaires sur la représentation ρ qui pourraient s'avérer intéressantes, mais cette voie n'a pas été explorée.

***Théorème 6.3* (Toledo, Corlette).** — *Soient m, n deux entiers, $\Gamma < \mathrm{SU}(n,1)$ un réseau cocompact et $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(m,1)$ une représentation. Alors $|\tau_n(\rho)| \leq \mathrm{Vol}(X)$ (où $\mathrm{Vol}(X) = \frac{1}{n!}\int_X \omega_n^n$) avec égalité si et seulement si ρ est $\mathbb{C}$-fuchsienne.*

Notons que les méthodes diffèrent chez Toledo et Corlette : le premier utilise la cohomologie bornée alors que le second obtient le résultat en corollaire d'un théorème d'existence des applications harmoniques ρ-équivariantes. On retrouve ensuite le théorème 6.1 car l'invariant de Toledo est constant sur les composantes connexes de l'espace des représentations de Γ dans $\mathrm{PU}(n,1)$.

Quelques années plus tard, Burger et Iozzi (voir [**BI2**]) se sont intéressés au même problème mais sans supposer que Γ était uniforme. Les difficultés supplémentaires sont multiples, la première étant la définition même de l'invariant de Toledo. Cependant, si $n \geq 2$, d'après un théorème de Zucker [**Zuc**] on a une injection en degré 2 de la cohomologie L^2 de X dans la cohomologie de de Rham : $H^2_{(2)}(X,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^2_{dR}(X,\mathbb{R})$. Burger et Iozzi montrent que la classe de de Rham qui nous intéresse (voir ci-dessus) est bien dans l'image de la cohomologie L^2 ce qui permet de définir l'invariant comme dans le cas uniforme en calculant l'intégrale avec un représentant L^2 de $[f^\star\omega_n]$. Puis, en utilisant comme Toledo la cohomologie bornée, mais en perfectionnant sensiblement la méthode, ils montrent un analogue du théorème 6.3. Enfin, avec Maubon, nous avons redémontré ce théorème dans [**KMa1**] en faisant appel cette fois aux applications harmoniques.

***Théorème 6.4* (Burger-Iozzi, [KMa1]).** — *Soient m, n deux entiers, $\Gamma < \mathrm{SU}(n,1)$ un réseau et $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(m,1)$ une représentation. Supposons que $n \geq 2$ ou que Γ est* *uniforme. Alors* $|\tau(\rho)| \leq \mathrm{Vol}(X)$ *avec égalité si et seulement si* ρ *est* $\mathbb{C}$*-fuchsienne. En particulier, il n'existe pas de déformation non triviale d'une représentation standard.*

Donnons les grandes lignes de la preuve géométrique.
Etape 1. Existence d'une application harmonique ρ-équivariante d'énergie finie de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}^m$.

Dans sa preuve de la superrigidité sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{PSp}(n,1)$, Corlette avait montré qu'il existait une application ρ-équivariante d'énergie finie en constatant que la rétraction des cusps sur la partie compacte de la variété quotient était d'énergie finie. Malheureusement, pour les quotients de $\mathbb{B}^n$, cela n'est vrai que pour $n \geq 3$. Pour montrer que si $n = 2$, il existe tout de même une application ρ-équivariante d'énergie finie, nous sommes contraints de la construire soigneusement "à la main" dans les cusps. Grâce au théorème 2.2, nous savons alors qu'il existe une application harmonique ρ-équivariante d'énergie finie f dès que $\rho(\Gamma)$ ne fixe pas de point à l'infini dans $\mathbb{B}^m$. Mais si ce cas se produit, il est facile de voir que $\tau(\rho) = 0$ et nous l'excluons donc.
Etape 2. Plurisousharmonicité de f et borne sur l'invariant.

D'après le théorème 4.1, f est pluriharmonique et en fait, si le rang réel de df est au moins 3 en un point, f est même (anti)holomorphe (ceci repose sur le fait que les sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{su}(m,1) = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$, sont soit très petites, soit contenues dans $\mathfrak{p}^{1,0}$ ou $\mathfrak{p}^{0,1}$, voir par exemple [**CT2**]). Or, dans le deuxième cas, la borne sur $|\tau(\rho)|$ est immédiate par le lemme de Schwarz (elle provient d'une inégalité ponctuelle). Sinon, f est partout de rang réel au plus 2. On montre alors en utilisant une formule qui apparaissait déjà dans [**To1**] que d'une part $[f^\star\omega_m]$ est aussi représentée par une classe L^2 et que d'autre part nécessairement $|\tau(\rho)| < \mathrm{Vol}(X)$.

Enfin, dans les cas maximaux (i.e. ceux pour lesquels la borne est atteinte), f est une isométrie (anti)holomorphe toujours par le lemme de Schwarz. Sachant cela, en utilisant à nouveau la formule de type Bochner de Mok-Siu-Yeung, on montre que f est totalement géodésique.

Une fois ce résultat montré, la rigidité des représentations standard suit également car l'invariant de Toledo est toujours localement constant sur l'espace des représentations de Γ dans $\mathrm{PU}(m,1)$.

Lorsque $n = 1$ et que Γ n'est pas cocompact, la situation change radicalement : Gusevskii et Parker [**GP**] ont montré que certains réseaux de $\mathrm{PU}(1,1)$ admettaient des déformations quasi-fuchsiennes dans $\mathrm{PU}(2,1)$. Cependant, au terme d'une correspondance avec Burger et Iozzi, nous avons pu définir un invariant de Toledo pour les représentations des réseaux de $\mathrm{PU}(1,1)$ dans $\mathrm{PU}(m,1)$, et montrer l'analogue du théorème 6.4 dans ce cas (ce travail se trouve aussi détaillé dans [**KMa1**]). La différence réside dans le fait que l'invariant n'est plus localement constant sur l'espace des représentations. Disons quelques mots sur sa définition.

Nous construisons une classe dans le groupe de cohomologie à support compact $H^2_c(X,\mathbb{R})$ de la façon suivante : comme auparavant, on commence par considérer une application ρ-équivariante f de $\mathbb{B}^1$ dans $\mathbb{B}^m$. En général, il n'en existe pas d'énergie finie et $f^\star\omega_m$ vue comme une 2-forme sur X peut ne pas être L^2. Cependant, elle a une primitive α dans chaque cusp de X (en utilisant des potentiels adaptés), que l'on coupe par une fonction lisse identiquement nulle sur la partie compacte, et on peut alors considérer la classe $[f^\star\omega_m - d\alpha] \in H^2_c(X,\mathbb{R})$. On montre qu'elle est indépendante des choix faits et on définit $\tau(\rho) = \int_X (f^\star\omega_m - d\alpha)$.

Théorème 6.5 **(Burger-Iozzi, [KMa1])**. — *Soient m un entier, $\Gamma < \mathrm{SU}(1,1)$ un réseau et $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(m,1)$ une représentation. Alors $|\tau(\rho)| \leq \mathrm{Vol}(X)$ avec égalité si et seulement si ρ est $\mathbb{C}$-fuchsienne.*

Pour ce qui est de l'inégalité sur l'invariant, on procède encore à l'aide des applications harmoniques mais on est cette fois contraint de travailler avec des applications d'énergie infinie comme par exemple dans [**JZ**]. Les difficultés techniques sont assez importantes, mais compensées par le fait que la géométrie à l'infini de X est très simple puisque $\dim X = 1$ (en fait, même si l'application harmonique f est d'énergie infinie, $f^\star\omega_m$ est toujours L^2 sur X et pour une telle application, $\tau(\rho) = \int_X f^\star\omega_m$). Signalons enfin que Burger et Iozzi ont obtenu par leurs méthodes un résultat semblable au nôtre [**BI1**].

En conclusion, les déformations des représentations standard de réseaux de $\mathrm{PU}(n,1)$ dans $\mathrm{PU}(m,1)$ sont donc maintenant bien comprises, c'est pourquoi dans la partie suivante nous nous préoccuperons des représentations dans les groupes de type hermitien de rang supérieur.

PARTIE III
REPRÉSENTATIONS DES GROUPES KÄHLÉRIENS DANS LES GROUPES DE TYPE HERMITIEN

Nous revenons dorénavant sur les représentations des groupes fondamentaux des variétés compactes. Burger et Iozzi [**BI1**] ont montré une inégalité (optimale) sur l'invariant de Toledo dans une grande généralité. En gardant les notations de la partie précédente :

Théorème 6.6 **(Burger-Iozzi)**. — *Soient n un entier, $\Gamma < \mathrm{PU}(n,1)$ un réseau, $\mathcal{D}$ un domaine symétrique borné et $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ une représentation. Alors*

$$|\tau(\rho)| \leq \mathrm{rg}\,\mathcal{D} \cdot \mathrm{Vol}(X).$$

Pour $n = 1$, les cas d'égalité ont en outre été caractérisés de façon satisfaisante par Burger, Iozzi et Wienhard [**BIW**]. Cependant, alors que par leurs méthodes de cohomologie bornée l'inégalité s'obtient assez facilement (après un travail préliminaire conséquent), les cas d'égalité nécessitent une étude séparée dont la complexité augmente avec n et pour l'heure, aucun résultat ne semble montré par cette voie si $n \geq 2$.

A peu près à la même période, Bradlow, García-Prada et Gothen (voir [**BGG1**] et [**BGG2**]) sont arrivés à des résultats proches, toujours pour $n = 1$, en utilisant cette fois les fibrés de Higgs associés aux représentations (réductives). Une différence notable est qu'une fois l'inégalité établie par cette méthode, la caractérisation des cas d'égalité tombe rapidement. Malheureusement, pour $n \geq 2$, c'est cette fois l'obtention de la majoration sur l'invariant qui apparaît très compliquée.

Dans [**KMa2**], nous avons toutefois réussi à traiter, avec n quelconque, le cas de la plupart des domaines $\mathcal{D}$ de rang 2. Un autre avantage du passage par les fibrés de Higgs est de pouvoir travailler avec des groupes fondamentaux de variétés kählériennes, et non pas avoir à se limiter à des réseaux d'espaces symétriques hermitiens. Nous avons ainsi expliqué dans [**KMa3**] comment définir un invariant de Toledo pour les groupes fondamentaux des variétés de type général, puis nous avons étendu les résultats de [**KMa2**] à ce nouveau cadre.

Rappelons avant de poursuivre qu'une variété complexe compacte X de dimension n est dite de type général si elle a beaucoup de sections pluricanoniques au sens suivant : notons $K_X = \Lambda^n T_X^\star$ le fibré canonique de X. Il est bien connu que la dimension de Kodaira de X

$$\kappa(X) := \limsup_{m\to+\infty} \frac{\log \dim H^0(X, K_X^{\otimes m})}{\log m}$$

appartient à $\{-\infty, 0, 1, \ldots, n\}$. C'est un invariant biméromorphe. On dit que X est de type général si $\kappa(X) = n$.

7. L'invariant de Toledo pour les groupes fondamentaux des variétés de type général

Les réseaux de $\mathrm{PU}(n, 1)$ sont des exemples particuliers de groupes fondamentaux de variétés kählériennes. Il est en outre bien connu que ces derniers jouissent de propriétés très particulières, qu'ils partagent parfois avec les réseaux. Dans notre contexte, l'une des plus frappantes est la généralisation du théorème de rigidité forte de Mostow par Siu [**Siu1**]. Il paraît donc naturel de penser que les propriétés de l'invariant de Toledo proviennent du caractère kählérien des groupes plutôt que du simple fait qu'ils soient des réseaux de la boule. Par ailleurs, un théorème de Mok [**Mok2**] généralisé par Zuo [**Zuo**] entraîne que toute représentation linéaire d'un groupe fondamental de variété kählérienne se factorise (après passage éventuel à un sous-groupe d'indice fini) en transitant par un groupe fondamental de variété de type général. Dans un sens, l'étude des représentations linéaires des groupes kählériens se limite donc à celle des représentations des groupes fondamentaux de variétés de type général. Enfin, remarquons que certains groupes kählériens, bien que n'étant pas des réseaux d'espaces symétriques, admettent des représentations linéaires très intéressantes. Citons par exemple les groupes fondamentaux des surfaces de Mostow-Siu [**MS**] (ou leur généralisation en dimension 3 par Deraux [**Der1**]) qui se représentent par construction dans $\mathrm{PU}(2, 1)$ (ou $\mathrm{PU}(3, 1)$).

Pour ces raisons, nous avons étendu la définition de l'invariant de Toledo aux groupes fondamentaux des variétés de type général. Ceci est rendu possible par les derniers développements du Programme du Modèle Minimal comme nous allons le voir. Mais avant tout, il est utile de remarquer que la classe de de Rham de degré 2 qui permet de calculer l'invariant de Toledo est la classe d'un fibré en droites (à une constante près). Si $\mathcal{D} = G/K$ est un domaine symétrique borné, son dual compact a un groupe de Picard isomorphe à $\mathbb{Z}$ dont le générateur "positif" se restreint en un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{D}$. En général, G n'agit pas sur $\mathcal{L}$ mais c'est toujours le cas d'un revêtement fini $\tilde{G}$ (pas nécessairement le revêtement universel). En outre, si X est une variété compacte et $\rho : \pi_1(X) \to G$ une représentation, il existe un sous-groupe de $\pi_1(X)$ d'indice fini sur lequel ρ se relève à $\tilde{G}$ (on suppose donc maintenant que $G = \tilde{G}$). Ensuite, il suffit de prendre une application ρ-équivariante f du revêtement universel $\tilde{X}$ de X dans $\mathcal{D}$ et de tirer en arrière le fibré $\mathcal{L}$ par f. Finalement, $f^\star\mathcal{L}$ descend sur X pour donner un fibré en droites L_ρ et la classe en question est sa première classe de Chern $c_1(L_\rho)$.

Il est clair maintenant que l'invariant de Toledo de ρ tel que défini dans la section 6 est, à une constante près, le degré de L_ρ calculé avec la polarisation canonique du quotient de la boule. Mais, sur une variété de type général X, le diviseur canonique n'est ni ample, ni même numériquement effectif en général. Cependant, d'après les travaux de Birkar, Cascini, Hacon et McKernan [**BCHM**], X admet un modèle canonique X_{can} i.e. un espace analytique complexe normal qui lui est biméromorphe et sur lequel le diviseur canonique

$K_{X_{\mathrm{can}}}$ est $\mathbb{Q}$-Cartier et ample. Une désingularisation de X_{can} a un groupe fondamental canoniquement isomorphe à $\pi_1(X)$ de sorte que l'on peut remplacer X par cette désingularisation et supposer que l'on a un morphisme $\varphi : X \to X_{\mathrm{can}}$. La polarisation que nous utilisons sur X est le $\mathbb{Q}$-diviseur semi-ample $\varphi^\star K_{X_{\mathrm{can}}}$. Nous définissons donc l'invariant de Toledo par

$$\tau(\rho) := \deg_{\varphi^\star K_{X_{\mathrm{can}}}}(L_\rho) = \int_X c_1(L_\rho) \wedge c_1(\varphi^\star K_{X_{\mathrm{can}}})^{n-1}.$$

Dans le cas de $\mathbb{B}^n$, il est égal à l'ancien invariant de Toledo à une constante explicite près, et on vérifie aisément dans le cas général qu'il ne dépend pas de la désingularisation. Il peut même être défini sur le modèle X initial en utilisant les travaux de Boucksom dans sa thèse et leur généralisation dans [**BDPP**]. Le théorème principal de [**KMa3**], généralisant [**KMa2**] devient alors (nous notons ici $\mathrm{rg}\, G$ le rang réel de G, c'est-à-dire le rang de l'espace symétrique associé) :

Théorème 7.1 ([**KMa3**]). — *Soit X une variété de type général de dimension $n \geq 2$ et soit X_{can} son modèle canonique. Soit $G = \mathrm{SU}(p,q)$ avec $1 \leq q \leq 2$ et $p \geq q$, $G = \mathrm{Spin}(p,2)$ avec $p \geq 3$, ou $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. Finalement, soit $\rho : \pi_1(X) \to G$ une représentation. Alors l'invariant de Toledo de ρ vérifie l'inégalité*

$$|\tau(\rho)| \leq \mathrm{rg}\, G \cdot \frac{K^n_{X_{\mathrm{can}}}}{n+1}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $G = \mathrm{SU}(p,q)$ avec $p \geq qn$ et s'il existe un plongement propre (anti)holomorphe ρ-équivariant du revêtement universel de X_{can} sur une copie totalement géodésique de $\mathbb{B}^n$ dans l'espace symétrique associé à G, de courbure sectionnelle holomorphe induite $-1/q$. En particulier, le modèle canonique de X est lisse et uniformisé par $\mathbb{B}^n$, et la représentation ρ est discrète et fidèle.

L'inégalité est évidemment la même que celle de Burger-Iozzi lorsque les situations considérées sont identiques. Pour aider à la compréhension du théorème, nous donnons un exemple de plongement holomorphe totalement géodésique de $\mathbb{B}^n$ dans l'espace symétrique associé à $\mathrm{SU}(p,q)$ (avec $p \geq qn$), de courbure sectionnelle holomorphe induite (maximale) $-1/q$ (voir aussi l'exemple 3.3 pour les notations) :

$$f_{max} : z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \longmapsto Z = \begin{pmatrix} z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En outre, à composition par un élément de $\mathrm{SU}(p,q)$ près, ce plongement holomorphe est unique et il est aussi caractérisé par le fait que $f_{max}^\star \omega_{\mathcal{D}} = q\,\omega_n$.

8. Utilisation de l'espace des modules des fibrés de Higgs polystables

Commençons par mettre de côté les représentations non réductives, i.e. celles pour lesquelles le théorème 2.2 ne s'applique pas. En fait, on peut "semi-simplifier" une telle représentation et, en tout cas dans les hypothèses du théorème 7.1, montrer que son invariant de Toledo est strictement plus petit que la borne indiquée.

Si ρ est réductive, rappelons (voir section 4) que l'on peut lui associer une application ρ-équivariante pluriharmonique f, puis un fibré de Higgs E. Dans notre situation, ce dernier a des structures supplémentaires. Pour simplifier, nous n'exposons que le cas de $\mathrm{SU}(p,q)$ mais la situtation est très similaire pour les autres groupes de type hermiten.

Sur l'espace symétrique $\mathcal{D}$ associé, nous avons la suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \mathbb{C}^{p+q} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

où $\mathbb{C}^{p+q}$ est le fibré trivial et S le fibré tautologique (de rang q). Le groupe $G = \mathrm{SU}(p,q)$ agit sur cette suite exacte, et lorqu'on la tire en arrière par f, elle descend sur X en une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow E \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

En outre, W et V sont deux sous-fibrés holomorphes de E pour la structure $\bar\partial$. Par ailleurs, comme $\mathrm{Hom}(S,Q)$ s'identifie au fibré tangent holomorphe de $\mathcal{D}$, le champ de Higgs θ se décompose en une somme $\theta = \beta \oplus \gamma$ où $\beta \in \Omega^1_X(\mathrm{Hom}(W,V))$ et $\gamma \in \Omega^1_X(\mathrm{Hom}(V,W))$ correspondent aux parties $(1,0)$ et $(0,1)$ de $d'f$.

Ce fibré de Higgs est polystable pour toute polarisation par une forme kählérienne sur X (voir section 4). Cependant, dans toute la suite nous utiliserons la polarisation donnée par $\varphi^\star K_{X_{\mathrm{can}}}$. En principe, vu que $\varphi^\star K_{X_{\mathrm{can}}}$ n'est pas ample, E est seulement $\varphi^\star K_{X_{\mathrm{can}}}$-semi-stable, mais il est facile de montrer que $\varphi^\star K_{X_{\mathrm{can}}}$ est "suffisamment positif" pour entraîner la polystabilité de E. Notons aussi que le fibré L_ρ dont le degré est l'invariant de Toledo n'est autre que le déterminant $\Lambda^q W$ de W. Un autre ingrédient essentiel est la semi-stabilité du fibré tangent T_X (au sens classique) toujours pour la même polarisation comme montrée par Enoki [**En**].

Enfin, par les travaux de Simpson ([**Sim2a**] et [**Sim2b**]), on dispose de l'espace des modules $\mathcal{M}$ des fibrés de Higgs polystables, muni d'une action de $\mathbb{C}^\star$, qui consiste simplement à garder la même structure holomorphe sur E et à multiplier le champ de Higgs par $t \in \mathbb{C}^\star$. Le point clé est que si l'on fait tendre t vers 0, on obtient un nouveau fibré de Higgs (dont le fibré C^∞ sous-jacent est encore isomorphe à E), muni d'une nouvelle structure complexe (telle que V et W sont toujours des sous-fibrés holomorphes) et un nouveau champ de Higgs. C'est un point fixe de l'action de $\mathbb{C}^\star$ i.e. dans la terminologie de Simpson un système de fibrés de Hodge. Cela implique ici que V et W se scindent holomorphiquement $V = \oplus_i V_i$ et $W = \oplus_i W_i$ et que le champ de Higgs se décompose aussi en $\beta = \oplus_i \beta_i$, $\gamma = \oplus_i \gamma_i$, de sorte que $\beta_i : W_i \to V_{i+1} \otimes \Omega^1_X$ et $\gamma_i : V_i \to W_i \otimes \Omega^1_X$ (avec la convention $V_i = W_i = 0$ si i assez grand).

Comme les fibrés C^∞ sous-jacents sont les mêmes, l'invariant de Toledo, qui est aussi le degré de W, est resté inchangé. On peut donc montrer la borne sur l'invariant sur ce nouveau fibré de Higgs. Son champ de Higgs est plus simple mais malheureusement, si $\operatorname{rg} W = q \geq 3$, ce n'est pas suffisant, ce qui explique les restrictions dans l'énoncé du théorème 7.1. Notons que Klingler [**Kl1**] et Reznikov [**Re**] étaient déjà tombés précédemment sur des problèmes du même type.

Le lecteur remarquera aussi dans la suite que, bien que n'étant a priori qu'une réécriture de la pluriharmonicité, le langage des fibrés de Higgs polystables est beaucoup plus adapté à notre propos. Il permet en particulier d'exploiter plus facilement les objets holomorphes hérités d'une représentation réductive.

9. Esquisse de la preuve du théorème 7.1

Puisque $q \leq 2$, la partie W du système de fibrés de Hodge peut se scinder en deux fibrés en droites, c'est le cas le plus compliqué que nous ne traiterons pas. Sinon, en faisant éventuellement des regroupements, $V = V_1 \oplus V_2$ et les seules parties du champ de Higgs qui peuvent apparaître sont $\gamma_1 : V_1 \to W \otimes \Omega^1_X$ et $\beta : W \to V_2 \otimes \Omega^1_X$ (nécessairement $\gamma_2 = 0$). Le raisonnement que nous allons faire est d'ailleurs valable pour q quelconque, à la condition que W ne se scinde pas.

Soit $\mathcal{F} \subset W$ le faisceau déstabilisant maximal de W (en particulier, il est semistable). On considère la restriction de β, $\beta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \otimes T_X \to V_2$. Puisque γ_2 est nul, $\mathcal{F} \oplus \operatorname{Im} \beta_{\mathcal{F}}$ est un sous-faisceau θ-invariant de E donc $\deg \operatorname{Im} \beta_{\mathcal{F}} \leq -\deg \mathcal{F}$. Le produit tensoriel de deux faisceaux semi-stables est semi-stable donc $\mu(\mathcal{F}) + \mu(T_X) = \mu(\mathcal{F} \otimes T_X) \leq \mu(\operatorname{Im} \beta_{\mathcal{F}})$ ce qui implique que $(\operatorname{rg}\beta_{\mathcal{F}} + \operatorname{rg}\mathcal{F})\mu(\mathcal{F}) \leq \operatorname{rg}\beta_{\mathcal{F}}\,\mu(\Omega^1_X)$. Par conséquent,

$$\deg W \leq q\,\mu(\mathcal{F}) \leq q\,\frac{\operatorname{rg}\beta_{\mathcal{F}}}{\operatorname{rg}\beta_{\mathcal{F}} + \operatorname{rg}\mathcal{F}}\,\frac{\deg\Omega^1_X}{n} \leq \frac{q}{n+1}\deg\Omega^1_X = \frac{q}{n+1}\,K^n_{X_{\mathrm{can}}}$$

(la dernière inégalité provient de $\operatorname{rg}\beta_{\mathcal{F}} \leq n\operatorname{rg}\mathcal{F}$), ce qui donne la borne supérieure sur l'invariant de Toledo. La borne inférieure est obtenue de la même manière en dualisant le fibré de Higgs.

Supposons maintenant que l'invariant soit maximal. On obtient tout d'abord en analysant les calculs précédents que W est semi-stable, $\deg W + \deg \operatorname{Im}\beta = 0$ et $\beta : W \otimes T_X \to V_2$ est génériquement injectif. Mais comme la semi-stabilité est une propriété ouverte, le fibré W correspondant à la représentation initiale (avant la déformation par l'action de $\mathbb{C}^\star$) est également semi-stable. On peut ensuite reprendre les arguments ci-dessus (en prenant $\mathcal{F} = W$ et en utilisant que $W \oplus \operatorname{Im}\beta$ est θ-invariant) et on arrive aux mêmes conclusions sur le fibré de Higgs avant déformation.

La relation $[\theta, \theta] = 0$ ajoutée à l'injectivité générique de β implique facilement que γ est identiquement nul, car $n \geq 2$, donc que f est (génériquement immersive) holomorphe. Lorsque $\tilde{X} = \mathbb{B}^n$, le lemme de Schwarz implique alors que l'on a ponctuellement sur $\tilde{X}$ l'égalité $f^\star\omega_{\mathcal{D}} = q\,\omega_n$. Par l'unicité de f_{max} ci-dessus, on obtient que $f = f_{max}$ (à composition par une isométrie près) et le théorème est montré.

Sinon, par un raffinement d'un argument d'Eyssidieux et Mok [**EM**], on montre que quitte à composer par un élément de $\mathrm{SU}(p,q)$, f envoie $\tilde{X}$ dans l'image de f_{max}. De plus, l'application holomorphe f se factorise par le revêtement universel $\tilde{X}_{\mathrm{can}}$ du modèle canonique qui est normal. Il suffit ensuite de voir que l'application qui va de $\tilde{X}_{\mathrm{can}}$ dans la copie totalement géodésique de $\mathbb{B}^n \subset \mathcal{D}$ est un biholomorphisme local. Les arguments reposent essentiellement sur l'amplitude du diviseur canonique du modèle canonique. Nous renvoyons à [**KMa3**] pour les détails.

Remarque 9.1. — Avant de conclure cette section par quelques questions, faisons un commentaire sur la raison pour laquelle la méthode utilisant les fibrés de Higgs aboutit facilement sur les courbes, sans restriction sur le rang de $\mathcal{D}$ ([**BGG1**]). Cela est simplement dû au fait que le fibré tangent T_X est alors inversible. En effet, dans ce cas, on peut par exemple considérer, sans déformer E, l'image I de $\beta : W \to V \otimes K_X$. On a $I \simeq W/\operatorname{Ker}\beta$ et $\deg\operatorname{Ker}\beta \leq 0$ car $\operatorname{Ker}\beta$ est trivialement θ-invariant. Ensuite, le sous-faisceau $W \oplus I \otimes K_X^{-1} \subset E$ est aussi θ-invariant donc

$$\deg W \leq -(\deg W - \deg\operatorname{Ker}\beta + \operatorname{rg} I \deg T_X) \leq -\deg W + \operatorname{rg} I \deg K_X$$

et la borne, ainsi que la caractérisation des cas maximaux, en découle immédiatement. Evidemment, ce raisonnement ne peut plus être fait si $n \geq 2$.

Remarque 9.2. — Nos travaux sur les majorations de l'invariant de Toledo (souvent appelées inégalités de type Milnor-Wood) semblent avoir un lien direct avec d'autres inégalités dites de type Arakelov, notamment celles étudiées dans les travaux récents de Möller-Viehweg-Zuo (voir l'article de *survol* écrit par Viehweg **[Vi]**, ainsi que les références qui y sont indiquées). En particulier, nous avons aussi montré dans **[KMa2]** que sous les hypothèses du théorème 7.1 avec $G = \mathrm{SU}(p,q)$ et X quotient compact de $\mathbb{B}^n$, $\tau(\rho)$ vérifie l'inégalité de type Arakelov

$$|\tau(\rho)| \leq \frac{pq}{p+q}\frac{\deg K_X}{n}.$$

Questions 9.3. — (1) On peut conjecturer (disons dans le cas de $\mathrm{SU}(p,q)$) que l'analogue du théorème 7.1 est vrai pour $n \geq 2$ et sans restriction sur p et q. L'idée de déformer la représentation de départ par l'action de $\mathbb{C}^\star$ sur $\mathcal{M}$ n'est malheureusement pas suffisante en l'état pour traiter les cas $q \geq 3$. Dans **[BGG1]**, il est montré que si $n = 1$, dans chaque composante connexe de $\mathcal{M}$ il existe un fibré de Higgs binaire, ce qui signifie que $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$. Il est naturel de se demander si cela reste vrai pour $n \geq 2$. Si tel était le cas, le théorème général en découlerait. Cependant il faudrait, pour montrer cela, pouvoir continuer à déformer les systèmes de fibrés de Hodge qui ne sont pas binaires. Sur une courbe, cela est rendu possible par une utilisation de la formule de Riemann-Roch mais en dimension supérieure cette dernière ne semble pas donner d'information exploitable. Y a-t-il d'autres moyens de déformer un système de fibrés de Hodge non binaire ?

(2) Dans une autre direction, remarquons que l'on peut supposer (au moins dans le cas où K_X est ample) que $n = 2$ en prenant des sections hyperplanes et en utilisant le théorème de Lefschetz (en vertu duquel le groupe fondamental sera inchangé). Le nouveau fibré de Higgs est la restriction du précédent à la surface, mais le fait que T_X soit maintenant de dimension 2 simplifie la combinatoire du champ de Higgs et on peut espérer mieux le comprendre (en particulier les implications de la relation $[\theta, \theta] = 0$).

En prenant encore une section hyperplane, on peut même aller jusque $n = 1$ mais on n'a plus qu'une surjection $\pi_1(C) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ et les représentations maximales de $\pi_1(C)$ ne sont jamais induites par des représentations de $\pi_1(X)$ car elles sont injectives. Il serait intéressant d'étudier simultanément l'incidence du passage de X à C au niveau des groupes fondamentaux et des fibrés de Higgs (et donc évidemment de l'invariant de Toledo).

(3) La méthode de la partie suivante pourrait conduire à une nouvelle approche sur l'invariant de Toledo via les applications de périodes (cf. questions 12.2). Elle repose sur l'espoir que chacun des fibrés W_i d'un système de fibrés de Hodge ait un degré qui vérifie individuellement la borne, de sorte qu'après avoir sommé les bornes on obtienne

la majoration désirée de $\deg W$. Plus précisément, a-t-on $|\deg W_i| \leq \frac{\operatorname{rg} W_i}{n+1} K^n_{X_{\mathrm{can}}}$ pour tout i ?

(4) Dans [**Kl2**], Klingler a montré par des méthodes “à la Weil” que la rigidité locale de certaines représentations standard (non maximales) de réseaux $\Gamma < \mathrm{SU}(n,1)$ dans $\mathrm{SU}(n+p,1+q)$. On peut se demander si plus généralement c'est vrai pour les représentations dans $\mathrm{SU}(kn+p,k+q)$ induites par le plongement “diagonal” de k copies de $\mathrm{SU}(n,1)$, avec $k \geq 2$. Y a-t-il une approche possible par les fibrés de Higgs dans l'esprit des travaux que nous venons d'exposer ?

(5) Indépendamment de l'invariant de Toledo, l'existence du plongement holomorphe “maximal” f_{max} ci-dessus, ainsi que la question 5.4 (1) de Siu, amènent à la question suivante : existe-t-il des immersions holomorphes $f : \Gamma\backslash\mathbb{B}^n \longrightarrow \Delta\backslash\mathcal{D}$ entre quotients, où $\mathcal{D}$ est un domaine symétrique borné associé à $\mathrm{SU}(p,q)$ avec $pq \geq n > p \geq q$ et Γ cocompact ? La réponse pourrait être négative. Une manière d'étudier le problème serait d'utiliser la structure du bord de $\mathcal{D}$, à la façon de Tsai dans [**Ts**]. Des questions semblables ont été abordées dans plusieurs papiers de Mok mais en général avec une source de rang au moins 2.

PARTIE IV
SUR UNE CONJECTURE DE CARLSON ET TOLEDO

10. Enoncé de la conjecture et premiers résultats

Il est bien connu que tout groupe infini de présentation finie ne peut pas être le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte (nous renvoyons à [**ABCKT**] pour un panorama détaillé du sujet). Par exemple, la théorie de Hodge fournit immédiatement des restrictions sur la cohomologie des groupes kählériens en degré 1 ; en effet, si X est une variété kählérienne compacte, $\dim H^1(\pi_1(X), \mathbb{Q}) = \dim H^1(X, \mathbb{Q})$ est nécessairement pair. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à une conjecture de Carlson et Toledo qui porte sur le deuxième groupe de cohomologie d'un groupe kählérien.

Conjecture 10.1. — *Soit X une variété kählérienne compacte. Supposons que $\pi_1(X)$ est infini. Alors $H^2(\pi_1(X), \mathbb{Q}) \neq 0$.*

Dans la suite, X sera une variété kählérienne compacte et $\Gamma = \pi_1(X)$ son groupe fondamental. Pour les courbes complexes de genre au moins 2, ou plus généralement pour les variétés uniformisées par un domaine symétrique borné, la conjecture est évidente puisque dans ce cas, le revêtement universel est contractile donc $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}) \simeq H^2(X, \mathbb{Q})$ et ce dernier contient la classe d'un fibré ample. En général, elle semble hors de portée mais au vu des exemples précédents, on peut commencer par s'intéresser aux groupes fondamentaux admettant des représentations non triviales dans des groupes linéaires. Par exemple, Reznikov [**Re**] a remarqué que si Γ admet une représentation ρ non rigide (au sens de Simpson [**Sim1**]) dans $\mathrm{SL}(m, \mathbb{C})$ pour un certain $m \geq 1$, alors la conjecture est vraie. La (courte) preuve utilise la non-annulation de $H^1(\Gamma, \mathrm{Ad}\rho)$ combinée au théorème de Lefschetz difficile pour les systèmes locaux (dû à Simpson).

On suppose donc dorénavant que Γ admet une représentation ρ irréductible, réductive, rigide (non bornée) i.e. que le fibré de Higgs est associé à une représentation dans un groupe $G = \mathrm{PU}(p, q)$, et que c'est un système de fibrés de Hodge.

Au niveau de l'application pluriharmonique ρ-équivariante $f : \tilde{X} \to \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} \simeq G/K$ est le domaine symétrique borné associé à $\mathrm{PU}(p, q)$, cela signifie qu'elle se factorise par une application holomorphe à valeurs dans un domaine de périodes du type $D = G/V$ avec $V \subset G$ sous-groupe compact de G contenu dans le compact maximal K. Plus exactement, il existe une application holomorphe $f_0 : \tilde{X} \to D$ telle que $f = \pi \circ f_0$, où $\pi : D \to \mathcal{D}$ est la projection. La structure complexe sur G/V est héritée de celle de la variété de drapeaux $G_{\mathbb{C}}/Q$ où $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{PGL}(p + q, \mathbb{C})$ et $Q \subset G_{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe parabolique tel que $G \cap Q = V$, G/V pouvant être vu comme la G-orbite (ouverte) de eQ dans $G_{\mathbb{C}}/Q$. Si $V \subsetneq K$, la projection π n'est jamais holomorphe.

Le fibré tangent à D se décompose en une somme directe C^∞, $T_D = T_D^v \oplus T_D^h$ où le premier est le tangent *vertical* i.e. le tangent aux fibres de π et le second est le tangent *horizontal*, son supplémentaire orthogonal pour la métrique G-invariante sur D. Il est important de noter que la distribution horizontale n'est pas intégrable. En outre, il existe un sous-fibré holomorphe $\mathcal{H}_D$ de T_D, contenu dans T_D^h, que l'on appellera le *superhorizontal* et dans lequel la différentielle df_0 de f_0 prend ses valeurs (car f_0 satisfait la condition de transversalité de Griffiths). On dira que f_0 est superhorizontale. Nous renvoyons à [**Gri**], [**GS**] et [**BR**] pour plus de détails.

Sur D se trouvent un certain nombre de fibrés en droites G-homogènes. L'idée est d'utiliser la première classe de Chern de l'un de ces fibrés pour créer une classe dans $H^2(\Gamma, \mathbb{Q})$. Prenons par exemple le fibré canonique K_D de D. D'après [**GS**], sa courbure dans les directions horizontales est strictement positive. Donc, comme f_0 est holomorphe, $f_0^\star K_D$ est un fibré à courbure semi-positive (non identiquement nulle car f_0 n'est pas constante si ρ n'est pas bornée) qui descend sur X en un fibré que l'on notera L, et définit donc une classe non nulle dans $H^2(X, \mathbb{Q})$. Cependant, on a une inclusion naturelle $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ et la question est de savoir si $c_1(L)$ est dans l'image de cette inclusion. Il se trouve que c'est équivalent à l'assertion suivante : quelle que soit l'application continue $\sigma : S^2 \to X$ (où S^2 est la sphère de dimension 2), $c_1(\sigma^\star L) = 0$. Une façon de vérifier cette assertion serait évidemment de montrer que l'application induite par f_0 entre les deuxièmes groupes d'homotopie $f_{0\star} : \pi_2(X) \simeq \pi_2(\tilde{X}) \to \pi_2(D)$ est nulle, mais le théorème 12.1 ci-dessous donne plutôt le sentiment que cette assertion pourrait être fausse en général.

Notons enfin que lorsque le domaine de périodes est l'espace symétrique (i.e. $D = \mathcal{D}$), cette dernière assertion est trivialement vraie puisque $\mathcal{D}$ est contractile. Reznikov avait quant à lui traité dans [**Re**] quelques autres cas particuliers de domaines de périodes pour lesquels une stratégie similaire s'appliquait.

11. Systèmes de fibrés de Hodge avec un sous-fibré de rang 1

Dans les cas où le domaine de périodes D est d'un type particulier, nous avons montré avec Klingler et Maubon qu'une adaptation de la méthode ci-dessus aboutit à la conjecture de Carlson-Toledo.

Notons h la forme hermitienne de signature (p, q) sur $\mathbb{C}^{p+q}$ que préserve $\mathrm{U}(p, q)$. Tout compact V comme ci-dessus est isomorphe à $\mathrm{P}(\mathrm{U}(r_0) \times \mathrm{U}(r_1) \times \cdots \times \mathrm{U}(r_k))$ où les r_i sont des nombres strictement positifs tels que $\sum_i r_{2i} = p$ et $\sum_i r_{2i+1} = q$. Le domaine de périodes $D = G/V$ classifie les décompositions h-orthogonales $\mathbb{C}^{p+q} = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ telles que $\dim E_i = r_i$ et $(-1)^i h_{|E_i} \gg 0$.

Théorème 11.1 **([KKM])**. — *Avec les même hypothèses que précédemment, supposons que $r_i = 1$, pour un certain $1 \leq i \leq k-1$. Alors $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}) \neq 0$.*

L'application holomorphe f_0 induit sur X un fibré de Higgs plat E de rang $p+q$, qui est un système de fibrés de Hodge i.e. il admet une décomposition holomorphe $E = \oplus_{j=0}^{k} E_j$ et le champ de Higgs θ se décompose en $\theta = \oplus_j \theta_j$ où $\theta_j : E_j \to E_{j+1} \otimes \Omega_X^1$ (avec la convention $E_{k+1} = 0$). Rappelons que θ vu comme une section de $\mathrm{Hom}(T_X, \oplus_j \mathrm{Hom}(E_j, E_{j+1}))$ s'identifie à la différentielle de f_0.

La preuve du théorème repose sur l'observation suivante : si $r_i = 1$, on déduit de la relation $[\theta, \theta] = 0$ que $\theta_i : E_i \otimes T_X \to E_{i+1}$ est de rang générique 1 (le rang ne peut pas être nul car cela signifierait que le système de fibrés de Hodge se scinde en deux, alors que l'on a supposé que la représentation est irréductible). L'idée consiste alors à utiliser la projection ν du domaine D dans la grassmannienne des $(r_0 + \cdots + r_i)$-plans $G_{\mathbb{C}}/Q'$, où $Q' \subset G_{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe parabolique maximal contenant Q, ou plus précisément dans la G-orbite Z de eQ'. Dans la terminologie de [**FHW**], Z est une orbite ouverte mesurable. Par ailleurs, la projection $\nu : D \to Z$ est holomorphe et le fait que θ_i est de rang 1 implique que l'application holomorphe $g = \nu \circ f_0 : \tilde{X} \to Z$ est de rang 1. Les fibres de cette application sont donc de codimension pure 1 et on peut appliquer un théorème de Kaup [**Gra**] d'après lequel il existe une courbe lisse C et des applications holomorphes $\hat{g} : \tilde{X} \to C$, $\phi : C \to Z$ telles que $g = \phi \circ \hat{g}$.

La courbe C ne peut pas être isomorphe à $\mathbb{P}^1$. En effet, d'après [**FHW**], il existe sur Z une fonction φ dont la forme de Levi est strictement positive dans les directions tangentes à g. Par conséquent, $\mathcal{L}(\phi^\star \varphi) = \phi^\star \mathcal{L}(\varphi)$ est génériquement positive puisque ϕ n'est pas constante, ce qui est impossible si C est compacte.

Finalement, on peut appliquer la méthode décrite dans la section précédente en prenant $g^\star K_Z$ à la place de $f_0^\star K_D$. En effet, la restriction de $g^\star K_Z$ à toute 2-sphère de $\tilde{X}$ est clairement topologiquement triviale puisque g se factorise à travers C qui est asphérique, et par [**FHW**] K_Z est à courbure strictement positive dans les directions tangentes à g.

12. Sphères horizontales dans les domaines de périodes

Nous montrons aussi que lorsque l'hypothèse du théorème 11.1 n'est pas vérifiée, un ensemble de générateurs de $\pi_2(D)$ est représenté par des sphères superhorizontales. Evidemment, cela n'exclut pas la possibilité que pour une application holomorphe superhorizontale $f_0 : \tilde{X} \to D$, l'application $f_{0\star}$ induite entre les deuxièmes groupes d'homotopie soit nulle, mais notre résultat montre qu'il existe de réelles obstructions.

Le deuxième groupe d'homotopie $\pi_2(D)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{k-1}$ (voir [**BR**]). Il est engendré par des sphères verticales

$$\Sigma_i = \mathrm{PU}(2)/\mathrm{P}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)) \subset \mathrm{PU}(r_{i-1} + r_{i+1})/\mathrm{P}(\mathrm{U}(r_{i-1}) \times \mathrm{U}(r_{i+1})) \subset G/V$$

où $1 \le i \le k-1$. Cependant, une application du h-principe de Gromov (voir par exemple [**Pa2**]) montre que ces sphères sont souvent homotopiquement équivalentes à des sphères superhorizontales $\sigma_i : S^2 \to D$ (i.e. σ_i est de classe C^1, et $d\sigma_i : T_{S^2} \to \mathcal{H}_D$). Plus précisément,

Théorème 12.1 (**[KKM]**). — *Pour tout* $1 \leq i \leq k-1$, *la sphère* Σ_i *est homotopiquement équivalente à une sphère superhorizontale dès lors que* $r_i \geq 2$.

Pour ce qui est de la preuve de ce théorème, un argument topologique assez simple montre que le h-principe s'applique dans le domaine de périodes $\mathrm{PU}(p,2)/\mathrm{P}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(1))$ dès que $p \geq 2$ (mais pas si $p = 1$). Ensuite, si $r_i \geq 2$, on peut plonger

$$\mathrm{PU}(2,2)/\mathrm{P}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(1)) \subset \mathrm{PU}(r_{i-1}+r_{i+1},r_i)/\mathrm{P}(\mathrm{U}(r_{i-1})\times\mathrm{U}(r_i)\times\mathrm{U}(r_{i+1})) \subset G/V$$

de sorte que les fibrés (super)horizontaux et verticaux soient respectés par le plongement.

Questions 12.2. — (1) Même lorsque le système de fibrés de Hodge associé à la représentation rigide n'a pas de sous-fibré de rang 1, on peut évidemment de la même manière que pour le théorème 11.1 projeter holomorphiquement le domaine de périodes sur différentes grassmanniennes. Est-il possible que l'image de la composée d'une de ces projections avec f_0 ne contienne pas de sphère non homotopiquement triviale ? Ceci impliquerait la conjecture de Carlson-Toledo dans le cas linéraire sans restriction.

Comme nous l'avons déjà suggéré dans les questions 9.3, cette méthode de projection pourrait aussi donner des résultats sur l'invariant de Toledo car elle permet d'"isoler" une partie θ_i du champ de Higgs des autres. Ensuite, des calculs de courbure sur Z pourraient par exemple permettre de donner des estimations des degrés de E_i et E_{i+1} (dans les notations de la section présente).

(2) Nous avons étudié et montré l'existence de sphères horizontales non homotopiquement triviales dans un domaine de périodes G/V essentiellement lorsque $G = \mathrm{PU}(p,q)$. Cependant, si G est un autre groupe de type Hodge (dans la terminologie de Simpson), on peut aussi montrer qu'il en existe, au moins dans des cas particuliers. Il serait naturel d'avoir un critère général, avec une preuve qui évite un traitement au cas par cas, pour l'existence de sphères horizontales qui représentent une classe d'homotopie donnée dans un domaine de périodes quelconque, avec des conditions adéquates sur la variation de structures de Hodge E.

(3) Par ailleurs (dans les notations du théorème 12.1), est-ce que Σ_i est homotope ou non à une sphère horizontale lorsque $r_i = 1$? Pour cette question, on est amené à étudier la situation en apparence simple où $D = \mathrm{PU}(2,1)/\mathrm{P}(\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1))$ (i.e. on considère des drapeaux complets de $\mathbb{C}^3$). Dans ce cas, $\pi_2(D) \simeq \mathbb{Z}$ mais nous ne savons pas si le générateur peut être représenté par une sphère horizontale (en particulier, le h-principe tel que nous l'utilisons ne s'applique pas). Pour compléter nos résultats

sur le deuxième groupe d'homotopie des domaines de périodes associés aux groupes $\mathrm{PU}(p,q)$, il serait essentiel de répondre à ce problème.

PARTIE V
EXTENSION DE CLASSES DE COHOMOLOGIE AVEC ESTIMATIONS

13. Problématique

Cette partie est indépendante des précédentes. Dans notre thèse, nous nous étions intéressés aux théorèmes d'annulation de la cohomologie sur les variétés kählériennes en vue notamment de les appliquer à certaines variétés q-convexes (dans l'esprit de [**Dem1**]). Ces travaux, qui utilisaient la théorie L^2 initiée par Hörmander, puis développée par beaucoup d'autres parmi lesquels Siu et Demailly, avaient fait l'objet d'une note [**Ko1**]. Récemment, nous nous sommes à nouveau intéressés à des problèmes connexes.

Plus précisément, on se place dans le contexte suivant : soit X une variété kählérienne, $Y \subset X$ une sous-variété complexe et $L' \to X$ un fibré en droites sur X. On considère le

Problème 13.1. — *Soit f une section lisse et D''-fermée de $\Lambda^{0,q}T_X^\star \otimes L'$ sur Y satisfaisant une certaine condition L^2. Peut-on trouver une extension lisse et D''-fermée F de f à X avec une bonne estimation L^2 de F sur X ?*

Le premier résultat dans ce sens est un célèbre théorème d'Ohsawa et Takegoshi [**OT**], lorsque Y est un hyperplan d'un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$, L' le fibré trivial et $q = 0$. Plus tard, Manivel [**Man**] a généralisé ce théorème (voir aussi la preuve simplifiée de Demailly [**Dem2**]) avec pour hypothèses : X est une variété faiblement pseudoconvexe, Y le lieu des zéros d'une section d'un fibré hermitien de rang r sur X, $L' = K_X \otimes L$ où L est un fibré en droites hermitien dont la courbure satisfait des propriétés de positivité appropriées et $q = 0$. Ces théorèmes ont eu de nombreuses applications, ils interviennent par exemple dans la preuve de l'invariance des plurigenres par Siu [**Siu4**].

Pour $q \geq 1$, la méthode employée par Manivel pose des problèmes techniques qui portent sur la régularité des $(0, q)$-formes. Dans [**Dem2**], Demailly propose une approche pour surmonter ces difficultés mais les arguments complets ne semblent pas être parus. C'est pourquoi, dans [**Ko2**], nous considérons le problème de l'extension de q-classes de cohomologie, plutôt que de représentants. Dans ce contexte, les situations où X est Stein sont sans intérêt puisque $H^q(Y, L') = 0$ pour toute sous-variété Y de X. Les domaines naturels d'application de notre résultat seront plutôt les cas où X est compacte, ou une famille de variétés kählériennes compactes paramétrée par un disque.

Théorème 13.2 **([Ko2])**. — *Soient (X, ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe de dimension n et $Y \subset X$ le diviseur des zéros d'une section holomorphe $s \in H^0(X, E)$ d'un fibré en droites hermitien (E, h_E) ; on suppose que Y est compact et non singulier. Soit L un fibré en droites muni d'une métrique hermitienne lisse h_L telle* *que*

$$\sqrt{-1}\Theta(L)+\sqrt{-1}d'd''\log|s|^2\geq 0, \tag{1}$$

$$\sqrt{-1}\Theta(L)+\sqrt{-1}d'd''\log|s|^2\geq \alpha^{-1}\sqrt{-1}\Theta(E) \text{ pour un certain } \alpha\geq 1, \tag{2}$$

$$|s|^2\leq e^{-\alpha} \tag{3}$$

sur X. Soit $0<\kappa\leq 1$ et soit $\Omega\subset X$ un ouvert relativement compact contenant Y. Alors, pour tout $q\geq 0$ et toute $(0,q)$-forme lisse f sur Y, D''-fermée et à valeurs dans $K_X\otimes L$, il existe une extension lisse F de f à Ω en tant que classe de cohomologie (i.e. $[F_{|Y}]=[f]\in H^q(Y,K_X\otimes L)$) telle que

$$\int_\Omega \frac{|F|^2}{|s|^{2(1-\kappa)}}dV_\omega\leq \frac{C}{\kappa}\int_Y \frac{|f|^2}{|ds|^2}dV_{Y,\omega} \tag{$\diamondsuit$}$$

où C est une constante numérique ne dépendant que de Ω, E, L et q.

Remarquons que contrairement au cas des $(0,0)$ formes, la constante C n'est pas “universelle” (voir aussi la fin de la section suivante) mais qu'un point essentiel pour des applications éventuelles est son indépendance vis-à-vis de Y.

14. Esquisse de la preuve du théorème principal

La preuve du théorème 13.2 s'appuie sur la stratégie de Demailly. Nous supposons pour simplifier que X est compacte, de sorte que l'on peut prendre $\Omega=X$. Pour commencer, on étend la forme f au voisinage de Y en une (n,q)-forme C^∞ que l'on note $\widetilde{f}_\infty$, de sorte que $|\widetilde{f}_\infty|=|f|$ en tout point de Y, $D''\widetilde{f}_\infty=0$ en tout point de Y, et $s^{-1}D''\widetilde{f}_\infty\in\mathcal{E}^k(X,\Lambda^{n,q+1}T^\star_X\otimes L\otimes\mathcal{O}_X(-Y))$, i.e. de classe C^k, pour k assez grand (à déterminer plus tard).

Ensuite, on fixe une function $\theta:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$, C^∞ à support dans $]-\infty,1[$, telle que $\theta\equiv 1$ sur $]-\infty,1/2]$ et $|\theta'|\leq 4$, et on considère l'extension tronquée de f

$$\widetilde{f}_\varepsilon:=\theta(\varepsilon^{-2}|s|^2)\widetilde{f}_\infty.$$

A l'aide d'une inégalité a priori (dérivée de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano classique) due essentiellement à Ohsawa, on obtient pour tout $\gamma>0$ et tout $\varepsilon>0$ assez petit, des solutions de l'équation $D''u_{\varepsilon,\gamma}+\gamma^{1/2}w_{\varepsilon,\gamma}=D''\widetilde{f}_\varepsilon$ sur X vérifiant

$$\int_{X\setminus Y}\frac{|u_{\varepsilon,\gamma}|^2}{|s|^2(\eta_\varepsilon+\lambda_\varepsilon)}dV_\omega+\int_{X\setminus Y}\frac{|w_{\varepsilon,\gamma}|^2}{|s|^2}dV_\omega\leq\frac{4}{\varepsilon^2}\int_{X\setminus Y}\theta'\Big(\frac{|s|^2}{\varepsilon^2}\Big)^2|\widetilde{f}_\infty|^2\,dV_\omega,$$

où η_ε et λ_ε sont des fonctions strictement positives scrupuleusement choisies de façon à ce que l'inégalité a priori puisse être utilisée. Notons que lorsque ε tend vers 0, le terme de droite de l'inégalité tend vers une constante explicite fois $\int_Y\frac{|f|^2}{|ds|^2}dV_{Y,\omega}$. Pour tout κ, en utilisant des calculs de McNeal et Varolin [**MV**], on montre que l'on peut faire en sorte que

$$\eta_\varepsilon + \lambda_\varepsilon \le \frac{4}{\kappa(|s|^2+\varepsilon^2)^\kappa}.$$

L'astuce de Demailly consiste alors à remarquer que l'équation entre formes à valeurs dans $K_X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X(-Y)$

$$D''(s^{-1}u_{\varepsilon,\gamma}) + \gamma^{1/2}s^{-1}w_{\varepsilon,\gamma} = s^{-1}D''\widetilde{f}_\varepsilon$$

est vérifiée sur X entier car les formes impliquées ont les bonnes propriétés d'intégrabilité près de Y. En outre, en utilisant un résultat de densité et le fait que $s^{-1}D''\widetilde{f}_\varepsilon$ est de classe C^k, on peut supposer que $t_{\varepsilon,\gamma} := s^{-1}u_{\varepsilon,\gamma}$ et $r_{\varepsilon,\gamma} := \gamma^{1/2}s^{-1}w_{\varepsilon,\gamma}$ sont aussi de classe C^k et vérifient (à peu de choses près) l'inégalité :

$$\frac{\kappa}{4}\int_X \frac{|st_{\varepsilon,\gamma}|^2}{(|s|^2+\varepsilon^2)^{1-\kappa}}dV_\omega + \frac{1}{\gamma}\int_X |r_{\varepsilon,\gamma}|^2 dV_\omega \le \frac{4}{\varepsilon^2}\int_X \theta'\Big(\frac{|s|^2}{\varepsilon^2}\Big)^2 |\widetilde{f}_\infty|^2\, dV_\omega.$$

L'idée naturelle est de faire tendre γ et ε vers 0 et de prendre des limites faibles : on a $\widetilde{f}_\varepsilon - st_{\varepsilon,\gamma} \to F$, $r_{\varepsilon,\gamma} \to 0$ mais le poids devient singulier à la limite et, puisque $q \ge 1$, on n'est pas assuré que F (qui vérifie cependant $D''F = 0$) est suffisamment régulière pour qu'elle prolonge f en un sens raisonnable.

C'est pourquoi nous contournons le problème en utilisant un isomorphisme de Leray "effectif" d'une manière semblable à Siu dans [**Siu2**]. De cette façon, en résolvant localement (i.e. en utilisant un recouvrement fixé $\mathcal{U}$ de X par des ouverts de Stein) des D''-équations par les méthodes L^2 classiques de Hörmander, nous obtenons des cochaînes $\zeta_{\varepsilon,\gamma} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}(K_X \otimes L))$ qui correspondent à $\widetilde{f}_\varepsilon - st_{\varepsilon,\gamma}$. En outre, les $\zeta_{\varepsilon,\gamma}$ sont de classe C^1 si k ci-dessus est choisi assez grand, leur restriction à Y sont des cocycles représentant la même classe que celle de f via l'isomorphisme de Leray, et leur norme L^2 pour un poids adapté est contrôlée. Cette fois, on peut faire tendre γ et ε vers 0. On obtient à la limite un cocycle $\zeta \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}(K_X \otimes L))$ (car le cobord de $\zeta_{\varepsilon,\gamma}$ tend vers 0 tout comme $r_{\varepsilon,\gamma}$) et bien que le poids devienne singulier lorsque ε tend vers 0, ζ est lisse par ellipticité de D'' en bidegré $(0,0)$. Pour finir, on revient à une $(0,q)$-forme à valeurs dans $K_X \otimes L$ de façon classique en utilisant une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$.

Notons pour conclure que la constante C dans le théorème 13.2 est principalement liée aux poids plurisousharmoniques sur les ouverts qui constituent $\mathcal{U}$ utilisés pour résoudre les équations locales, et à la norme des dérivées de la partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$.

Comme nous l'a signalé Berndtsson, le théorème 13.2 permet en fait, au moins si X est compacte, d'étendre le représentant f lui-même avec quasiment la même estimation. C'est une conséquence du résultat suivant.

***Lemme 14.1* (Berndtsson).** — *Soient X une variété complexe compacte, L un fibré en droites sur X et $Y \subset X$ un diviseur lisse. On fixe sur X et L des métriques hermitiennes arbitraires. Soit f une forme sur Y à valeurs dans L et D''-fermée. Alors f a des extensions à X, D''-fermées et de norme L^2 arbitrairement petite, si et seulement si f est D''-exacte.*

Pour le sens direct, soient F_ε des extensions D''-fermées de f dont la norme L^2 tend vers 0 avec ε. Leurs représentants harmoniques $\mathcal{F}_\varepsilon$ sont de norme plus petite, donc tendent aussi vers 0. Mais si X est compacte, l'espace des formes harmoniques (qui sont lisses) est de dimension finie : les normes sont toutes équivalentes et les normes $\|\mathcal{F}_\varepsilon\|_\infty$ tendent également vers 0. En particulier, les restrictions $\mathcal{F}_{\varepsilon|Y}$ tendent vers 0. Puisque sur Y, $f-\mathcal{F}_\varepsilon$ est D''-exacte, f appartient à l'adhérence des formes exactes. Mais D'' est d'image fermée sur une variété compacte, donc f est exacte.

La preuve de la réciproque repose sur l'existence de fonctions "cut-off" $\rho_\epsilon : X \to [0,1]$ $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ telles que pour tout ε l'ensemble $\{\rho_\varepsilon = 1\}$ est un voisinage de Y, le support $\mathrm{Supp}(\rho_\varepsilon)$ se concentre sur Y à mesure que ε tend vers 0, et $\lim_{\varepsilon\to 0} \|d''\rho_\varepsilon\| = 0$.

Si X est de dimension 1 et Y un point, le problème est local. En supposant que Y est le centre du disque unité, on pose $\rho = \log\log(1/|z|)$, et en choisissant des fonctions $\chi_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ telles que $\chi_a \equiv 0$ sur $[0,a[$, $\chi_a \equiv 1$ sur $]a+1,+\infty[$, et $\|\chi_a'\|_\infty$ est uniformément borné en a, on prend $\rho_\varepsilon = \chi_{1/\varepsilon} \circ \rho$. Dans le cas général, on se ramène localement à une situation produit et on obtient les fonctions ρ_ε en utilisant une partition de l'unité.

Ensuite, si $f = D''g$, on étend g arbitrairement en une forme $\tilde{g}_\infty$ sur X et il suffit de prendre comme extensions de f les formes

$$F_\varepsilon = D''(\rho_\varepsilon \tilde{g}_\infty) = \rho_\varepsilon D''\tilde{g}_\infty + d''\rho_\varepsilon \wedge \tilde{g}_\infty.$$

Si on reprend maintenant la situation du théorème 13.2, il suffit d'appliquer la réciproque du lemme 14.1 à $f - F_{|Y}$ pour obtenir des extensions de f en tant que forme avec une estimation aussi proche que voulu de $(\diamondsuit)$.

Pour finir, donnons deux autres conséquences du théorème 13.2. Il s'agit de résultats qualitatifs qui n'utilisent pas l'estimation.

***Corollaire 14.2* ([Ko2]).** — *Soient X, Y, E et L comme dans le théorème 13.2 i.e. satisfaisant* (1), (2) *et* (3). *Alors le morphisme de restriction*

$$H^q(X, K_X \otimes L) \longrightarrow H^q(Y, (K_X \otimes L)_{|Y})$$

est surjectif pour tout $q \geq 0$.

Le corollaire suivant entraîne en particulier l'invariance de certains nombres de Hodge pour une famille de variétés kählériennes compactes (résultat dû à Kodaira et Spencer dans le cas général). En prenant $E = \mathbb{C}$ et un fibré semi-positif L (par exemple $L = \mathbb{C}$) on obtient :

Corollaire 14.3 ([**Ko2**]). — *Soit $\pi : \mathfrak{X} \to \Delta$ une submersion holomorphe propre au-dessus du disque unité et soit L un fibré en droites semi-positif sur $\mathfrak{X}$. Supposons que $\mathfrak{X}$ est une variété kählerienne de dimension $n+1$. Alors, pour tout $q \geq 0$, $h^{n,q}(X_t, L) := \dim H^{n,q}(X_t, L)$ est indépendant de $t \in \Delta$ (où $X_t = \pi^{-1}(t)$).*

Remarque 14.4. — Siu a montré dans [**Siu4**] l'invariance des plurigenres i.e. de $\dim H^0(X_t, mK_{X_t})$ dans une famille de variétés projectives, en utilisant de façon cruciale le théorème d'Ohsawa-Takegoshi et l'estimation précise de la norme de l'extension. Par ailleurs, on sait que pour $q \geq 1$, $\dim H^q(X_t, mK_{X_t})$ n'est pas invariant par déformation (voir [**HL**]). Ceci pourrait avoir un lien avec le fait que la constante C de l'estimation L^2 dans notre théorème d'extension dépend du fibré L.

Questions 14.5. — On peut conjecturer que le théorème 13.2 reste vrai en supposant que E est un fibré de rang r et en remplaçant ds par $\Lambda^r ds$ (ceci est connu pour $q = 0$). La méthode que suggère Demailly dans [**Dem2**] consiste à éclater X le long de Y et à reproduire la méthode sur l'éclaté $\hat{X}$. Cependant, cela pose des problèmes techniques (éventuellement surmontables) pour la résolution locale du D'' car on doit utiliser un recouvrement de $\hat{X}$ qui "vient du bas" afin que la constante C ne dépende pas de l'éclatement, mais les images réciproques dans $\hat{X}$ des ouverts de Stein qui recouvrent X ne sont évidemment plus de Stein.

Références

[ABCKT] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick et D. Toledo, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds,* Mathematical Surveys and Monographs 44, American Mathematical Society, Providence

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon et J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type,* J. Amer. Math. Soc. **23**, 2010, 405–468

[BDPP] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun et T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension,* arXiv :math.AG/0405285

[BGG1] S. B. Bradlow, O. García-Prada et P. B. Gothen, *Surface group representations and* $\mathrm{U}(p,q)$*-Higgs bundles,* J. Diff. Geom. **64**, 2003, 111-170

[BGG2] S. B. Bradlow, O. García-Prada et P. B. Gothen, *Maximal surface group representations in isometry groups of classical Hermitian symmetric spaces,* Geom. Dedicata **122**, 2006, 185-213

[BI1] M. Burger et A. Iozzi, *Bounded differential forms, generalized Milnor-Wood inequality and an application to deformation rigidity,* Geom. Dedicata **125**, 2007, 1-23

[BI2] M. Burger et A. Iozzi, *A measurable Cartan theorem and applications to deformation rigidity in complex hyperbolic geometry,* Pure Appl. Math. Q. **4**, 2008, 181-202

[BIW] M. Burger, A. Iozzi et A. Wienhard, *Surface group representations with maximal Toledo invariant,* Ann. of Math. **172**, 2010, 517-566

[BR] F. E. Burstall et J. H. Rawnsley, *Twistor theory for Riemannian symmetric spaces,* Lecture Notes in Mathematics 1424, Springer-Verlag, Berlin, 1990

[CM] H.-D. Cao et N. Mok, *Holomorphic immersions between compact hyperbolic space forms,* Invent. Math. **100**, 1990, 49-67

[CT1] J. A. Carlson et D. Toledo, *Integral manifolds, harmonic mappings, and the abelian subspace problem,* Algebra–some current trends (Varna, 1986), Lecture Notes in Math. 1352, Springer, Berlin, 1988, 60-74

[CT2] J. A. Carlson et D. Toledo, *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **69**, 1989, 173-201

[CG] J. Cheeger et M. Gromov, *Chopping Riemannian manifolds,* Differential geometry. A symposium in honour of Manfredo do Carmo, Proc. Int. Conf., Rio de Janeiro/Bras. 1988, Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math. **52**, 1991, 85-94

[Co1] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics,* J. Diff. Geom. **28**, 1988, 361-382

[Co2] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry,* Ann. of Math. **135**, 1992, 164-182

[DM] P. Deligne et G. D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **63**, 1986, 5-89

[Dem1] J.-P. Demailly, *Sur les théorèmes d'annulation et de finitude de T. Ohsawa et O. Abdelkader,* Séminaire d'Analyse P. Lelong-P. Dolbeault-H. Skoda, Années 1985/1986, Lecture Notes in Math. 1295, Springer, Berlin, 1987, 48-58

[Dem2] J.-P. Demailly, *On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 extension theorem,* Complex analysis and geometry (Paris, 1997), Prog. Math., 188, Birkhäuser, Basel, 2000, 47-82

[Der1] M. Deraux, *A negatively curved Kähler threefold not covered by the ball,* Invent. Math. **160**, 2005, 501-525

[Der2] M. Deraux, *Forgetful maps between Deligne-Mostow ball quotients,* à paraître dans Geom. Dedicata

[Eb] P. B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds,* Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996

[En] I. Enoki, *Stability and negativity for tangent sheaves of minimal Kähler spaces,* Geometry and analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987), Lecture Notes in Math. 1339, Springer, Berlin, 1988, 118-126

[EM] P. Eyssidieux et N. Mok, *On the validity or failure of gap rigidity for certain pairs of bounded symmetric domains,* Asian J. Math. **8**, 2004, 773-794

[Fe] S. Feder, *Immersions and embeddings in complex projective spaces,* Topology **4**, 1965, 143-158

[FHW] G. Fels, A. Huckleberry et J. A. Wolf, *Cycle spaces of flag domains. A complex geometric viewpoint,* Progress in Mathematics 245, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006

[Go] W. M. Goldman, *Representations of fundamental groups of surfaces,* Geometry and topology (College Park, Md., 1983/84), Lecture Notes in Math. 1167, Springer, Berlin, 1985, 95-117

[GM] W. M. Goldman et J. J. Millson, *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space,* Invent. Math. **88**, 1987, 495-520

[Gra] H. Grauert, *Set theoretic complex equivalence relations,* Math. Ann. **265**, 1983, 137-148

[Gri] P. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds, III. Some global differential-geometric properties of the period mapping,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **38**, 1970, 125-180

[GS] P. Griffiths et W. Schmid, *Locally homogeneous complex manifolds,* Acta Math. **123**, 1969, 253-302

[GP] N. Gusevskii et J. R. Parker, *Representations of free Fuchsian groups in complex hyperbolic space,* Topology **39**, 2000, 33-60

[HL] N. Hao et L. Li, *Higher cohomology of the pluricanonical bundle is not deformation invariant,* arXiv :math/0612006

[He] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces,* Graduate Studies in Mathematics 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001

[JZ] J. Jost et K. Zuo, *Harmonic maps of infinite energy and rigidity results for representations of fundamental groups of quasiprojective varieties,* J. Diff. Geom. **47**, 1997, 469-503

[Kl1] B. Klingler, *Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l'arithméticité des réseaux hyperboliques complexes, et les "faux plans projectifs",* Invent. Math. **153**, 2003, 105-143

[Kl2] B. Klingler, *Local rigidity for complex hyperbolic lattices and Hodge theory,* à paraître dans Invent. Math.

[KKM] B. Klingler, V. Koziarz et J. Maubon, *On the second cohomology of Kähler groups,* à paraître dans Geom. Funct. Anal.

[Ko1] V. Koziarz, *Annulation de la cohomologie pour les fibrés semi-positifs,* C. R. Acad. Sci. Paris **327**, 1998, 143-148

[Ko2] V. Koziarz, *Extensions with estimates of cohomology classes,* à paraître dans Manuscripta Math.

[KMa1] V. Koziarz et J. Maubon, *Harmonic maps and representations of non-uniform lattices of* $\mathrm{PU}(m,1)$*,* Ann. Inst. Fourier **58**, 2008, 507-558

[KMa2] V. Koziarz et J. Maubon, *Representations of complex hyperbolic lattices into rank 2 classical Lie groups of Hermitian type,* Geom. Dedicata **137**, 2008, 85-111

[KMa3] V. Koziarz et J. Maubon, *The Toledo invariant on smooth varieties of general type,* à paraître dans J. Reine Angew. Math.

[KMo] V. Koziarz et N. Mok, *Nonexistence of holomorphic submersions between complex unit balls equivariant with respect to a lattice and their generalizations,* Amer. J. Math. **132**, 2010, 1347-1363

[Liu] K. Liu, *Geometric height inequalities,* Math. Res. Lett. **3**, 1996, 693-702

[Liv] R. Livné, *On certain covers of the universal elliptic curve,* Ph. D. Thesis, Harvard University, 1981

[Man] L. Manivel, *Un théorème de prolongement* L^2 *de sections holomorphes d'un fibré vectoriel,* Math. Z. **212**, 1993, 107-122

[Mar] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[MV] J. D. McNeal et D. Varolin, *Analytic inversion of adjunction :* L^2 *extension theorems with gain,* Ann. Inst. Fourier **57**, 2007, 703-718

[Mok1] N. Mok, *Metric rigidity theorems on Hermitian locally symmetric manifolds,* Series in Pure Mathematics 6, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989

[Mok2] N. Mok, *Factorization of semisimple discrete representations of Kähler groups,* Invent. Math. **110**, 1992, 557-614

[MSY] N. Mok, Y.-T. Siu et S.-K. Yeung, *Geometric superrigidity,* Invent. Math. **113**, 1993, 57-83

[MVZ] M. Möller, E. Viehweg, K. Zuo, *Special families of curves, of abelian varieties, and of certain minimal manifolds over curves,* Global aspects of complex geometry, Springer, Berlin, 2006, 417-450

[Mos] G. D. Mostow, *On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space,* Pacific J. Math. **86**, 1980, 171-276

[MS] G. D. Mostow et Y.-T. Siu, *A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball,* Ann. of Math. **112**, 1980, 321-360

[OT] T. Ohsawa et K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions,* Math. Z. **195**, 1987, 197-204

[Pa1] P. Pansu, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité,* Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94, Astérisque 227, Société Mathématique de France, Paris, 1995, 69-105

[Pa2] P. Pansu, *Submanifolds and differential forms on Carnot manifolds, after M. Gromov and M. Rumin,* Preprint, 2006

[Re] A. Reznikov, *The structure of Kähler groups, I : second cohomology,* Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part II (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., 3, II, Int. Press, Somerville, MA, 2002, 717-730

[Sam] J. H. Sampson, *Applications of harmonic maps to Kähler geometry,* Contemp. Math. **49**, 1986, 125-133

[Sat] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains,* Kanô Memorial Lectures, 4, Iwanami Shoten, Tokyo ; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980

[Sim1] C. T. Simpson, *Higgs bundles and local systems,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **75**, 1992, 5-95

[Sim2a] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **79**, 1994, 47-129

[Sim2b] C. T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety II,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **80**, 1994, 5-79

[Siu1] Y.-T. Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds,* Ann. of Math. **112**, 1980, 73-111

[Siu2] Y.-T. Siu, *A vanishing theorem for semipositive line bundles over non-Kähler manifolds,* J. Diff. Geom. **19**, 1984, 431-452

[Siu3] Y.-T. Siu, *Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semipositive case,* Arbeitstagung Bonn 1984, Lect. Notes Math. 1111, Springer-Verlag 1985, Berlin-Heidelberg-New York, 169-192

[Siu4] Y.-T. Siu, *Invariance of plurigenera,* Invent. Math. **134**, 1998, 661-673

[Th] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds,* Princeton University Press, Princeton, 1978

[To1] D. Toledo, *Harmonic mappings of surfaces to certain Kähler manifolds,* Math. Scand. **45**, 1979, 13-26

[To2] D. Toledo, *Representations of surface groups in complex hyperbolic space,* J. Diff. Geom. **29**, 1989, 125-133

[To3] D. Toledo, *Maps between complex hyperbolic surfaces,* Geom. Dedicata **97**, 2003, 115-128

[Ts] I.-H. Tsai, *Rigidity of proper holomorphic maps between symmetric domains,* J. Diff. Geom. **37**, 1993, 123-160

[Vi] E. Viehweg, *Arakelov inequalities,* Surveys in differential geometry. Vol. XIII. Geometry, analysis, and algebraic geometry : forty years of the Journal of Differential Geometry, Surv. Differ. Geom. 13, Int. Press, Somerville, MA, 2009, 245-275

[Zuc] S. Zucker, *L_2-cohomology of warped products and arithmetic groups,* Invent. Math. **70**, 1982, 169-218

[Zuo] K. Zuo, *Kodaira dimension and Chern hyperbolicity of the Shafarevich maps for representations of compact Kähler manifolds,* J. reine angew. Math. **472**, 1996, 139-156

1er décembre 2010

VINCENT KOZIARZ, IECN, Nancy-Université, CNRS, INRIA, Boulevard des Aiguillettes, B. P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France • *E-mail :* `koziarz@iecn.u-nancy.fr`