
Squelette et Level Set de géométries tubulaires: Applications aux écoulements bifluïdes 3D

Cédric Galusinski

Carpeinter à l'Imath: Frédéric Golay, Christian N'Guyen, Pierre Seppecher

Plan

Géométries tubulaires et jonction:

- Description par Level Set

- Description par squelette

- Passage 2D - 3D

- Application à la reconstruction de géométrie par coupe longitudinale

- Application à la reconstruction de vaisseaux sanguins (coupe transverse)

Level Set pour la simulation d'écoulements:

- Level Set pour la géométrie

- Level Set pour écoulement multifluide.

Modèle d'écoulement

- Navier-Stokes bifluide avec tension de surface.

Applications:

- Flows in tubing

- Flows water/air

Géométries tubulaires

Représentation des tubes par les axes et les rayons.

Le squelette est l'outil mathématique pour cette représentation.

Definition: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné de bord $\partial\Omega$, le squelette de Ω , S , est le plus petit ensemble de Ω tel que

$$\Omega = \cup_{x \in S} B(x, r(x)),$$

avec $B(x, r(x)) \subset \Omega$.

Remarque: • $B(x, r(x))$ est tangent à $\partial\Omega$
• $\overline{B}(x, r(x)) \cap \partial\Omega$ contient au moins 2 points.

Definition: fonction **Level Set** (distance signée à $\partial\Omega$) associée au squelette:

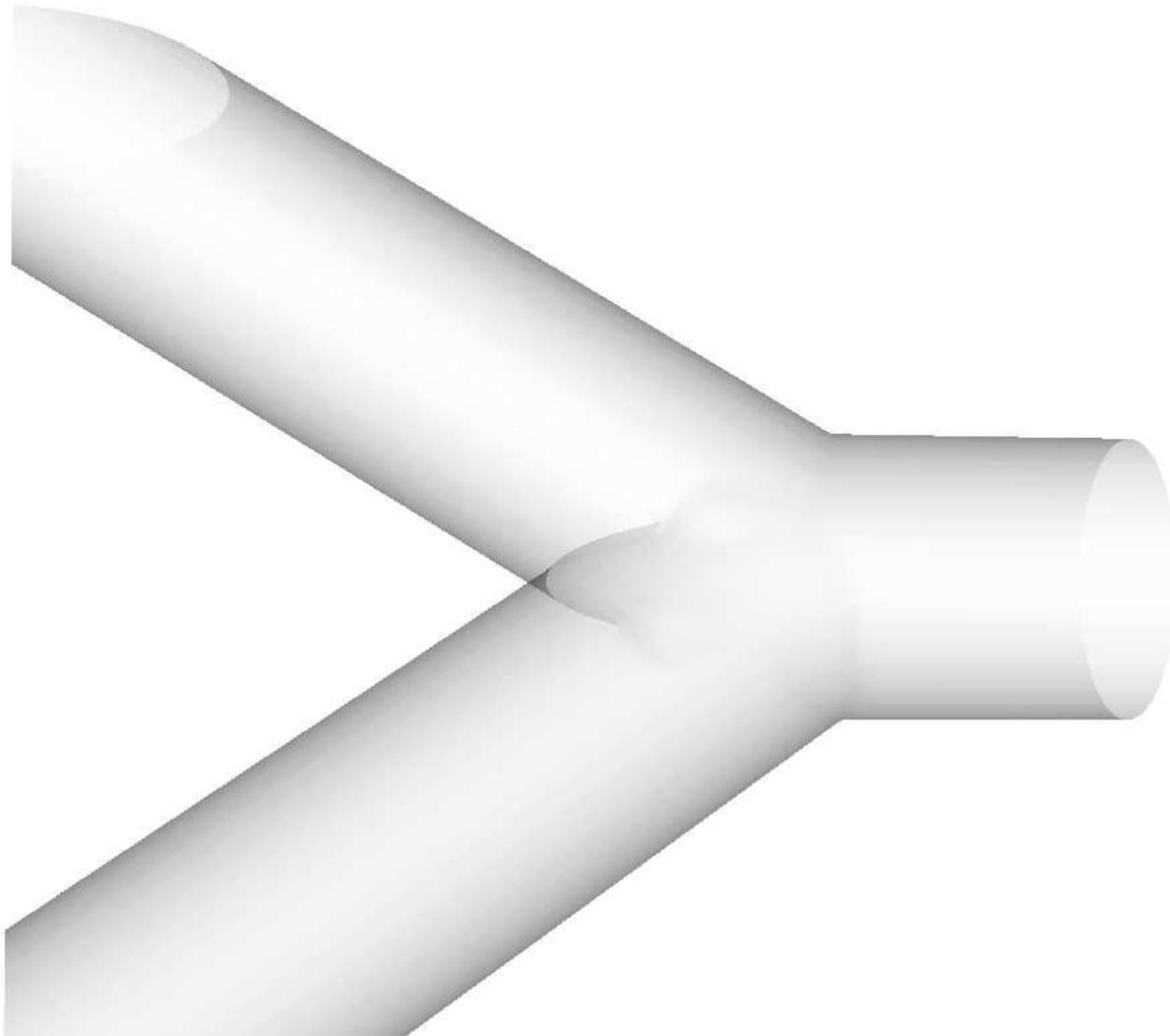
$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \psi(y) = \inf_{x \in S} \{ \|x - y\| - r(x) \}.$$

ψ est négative dans Ω .

Remarque: $\nabla\psi(y)$ est singulier ssi $y \in S$.

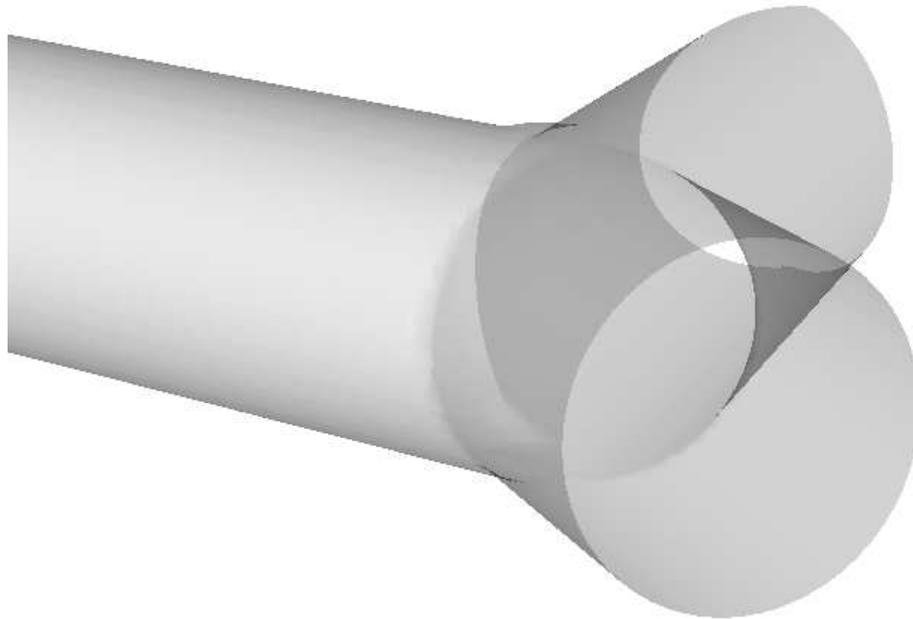
Squelette et géométrie

- Le squelette: • 3 segments définissent un "Y" avec rayon associé à chaque point
- La fonction Level set correspondante ψ :



Squelette et géométrie

- Le squelette: • 3 segments définissent un "Y" avec rayon associé à chaque point
- La fonction Level set correspondante ψ :



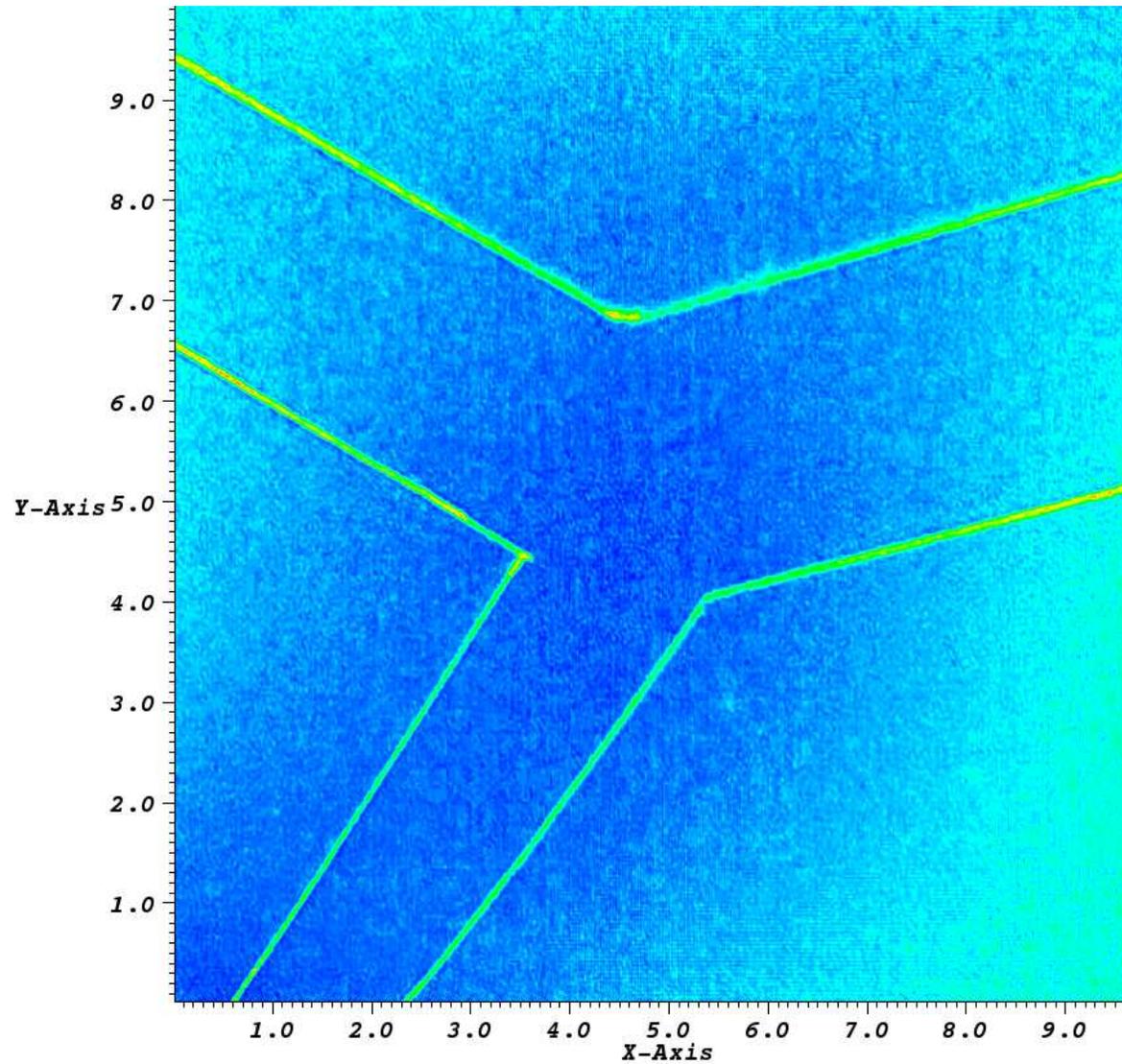
Application: coupe longitudinale

- On se donne une vue planaire (Image) d'une coupe longitudinale
- Calcul de la fonction level set 2D ψ
- Calcul du squelette 2D associé à ψ : Ensemble des points singuliers de ψ et rayon associé.
- Construction de la fonction Level Set 3D.

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \psi(y) = \inf_{x \in S} \{\|x - y\| - r(x)\}.$$

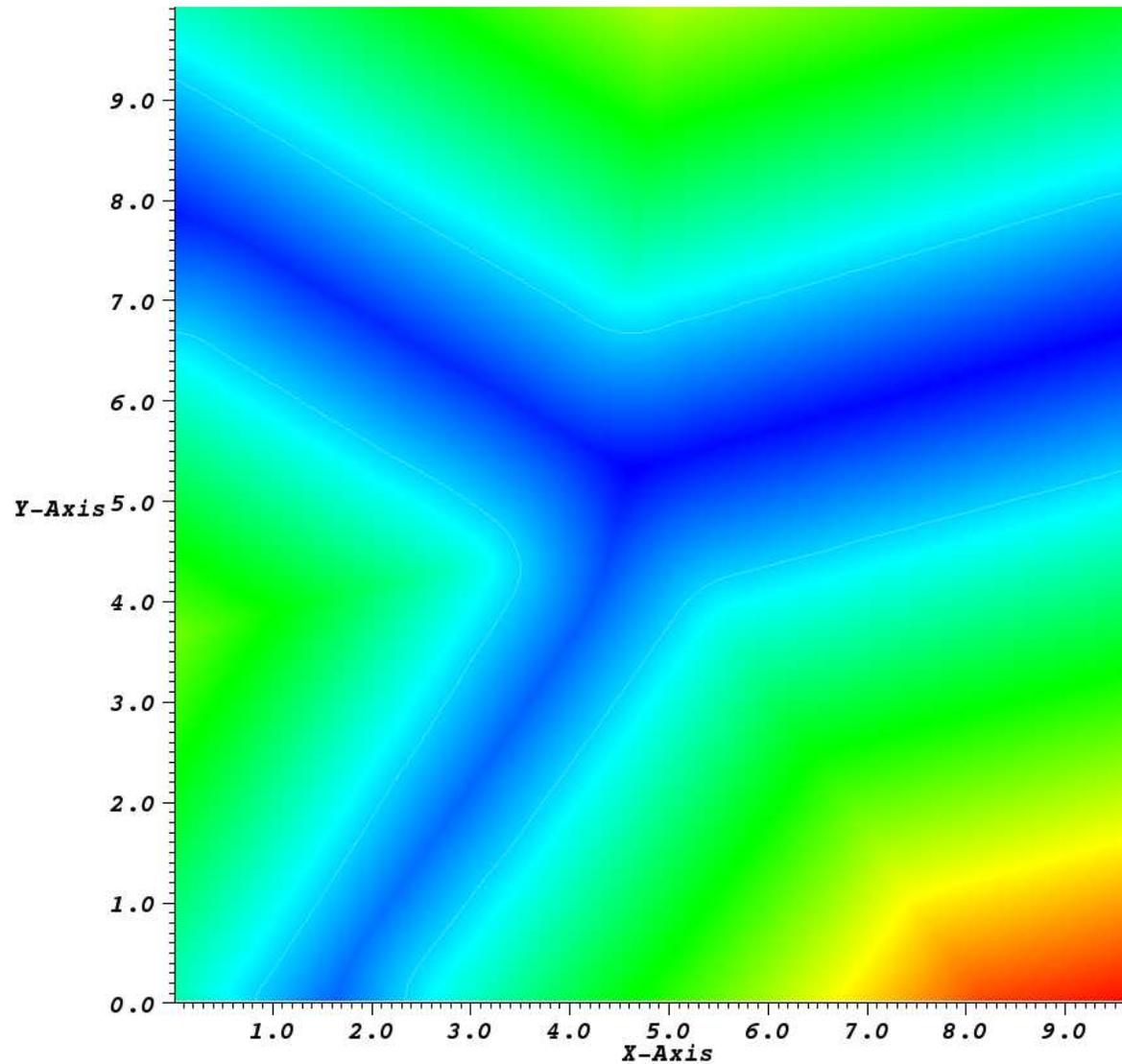
Application: coupe longitudinale

photo d'une image



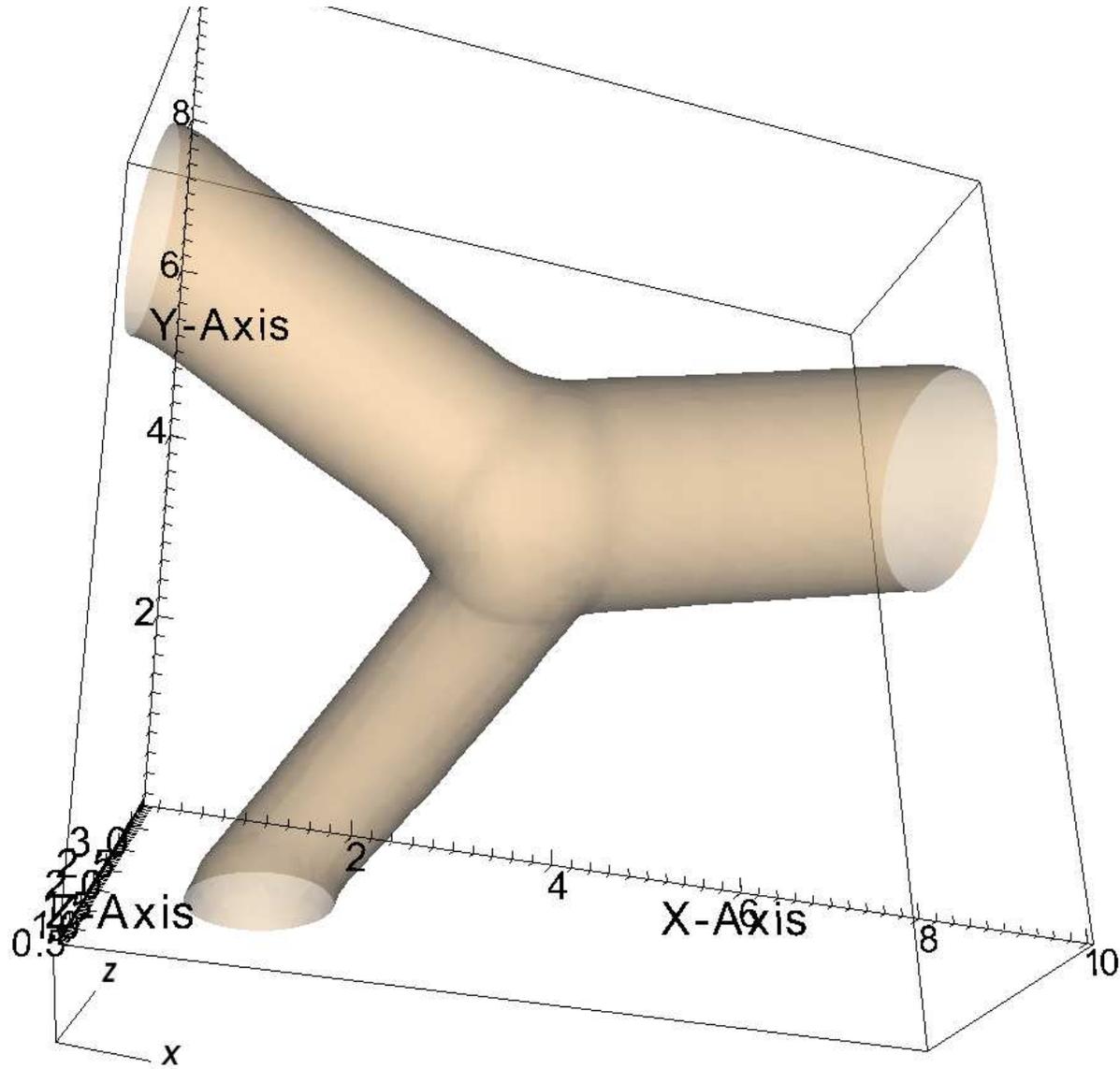
Application: coupe longitudinale

Fonction distance signée



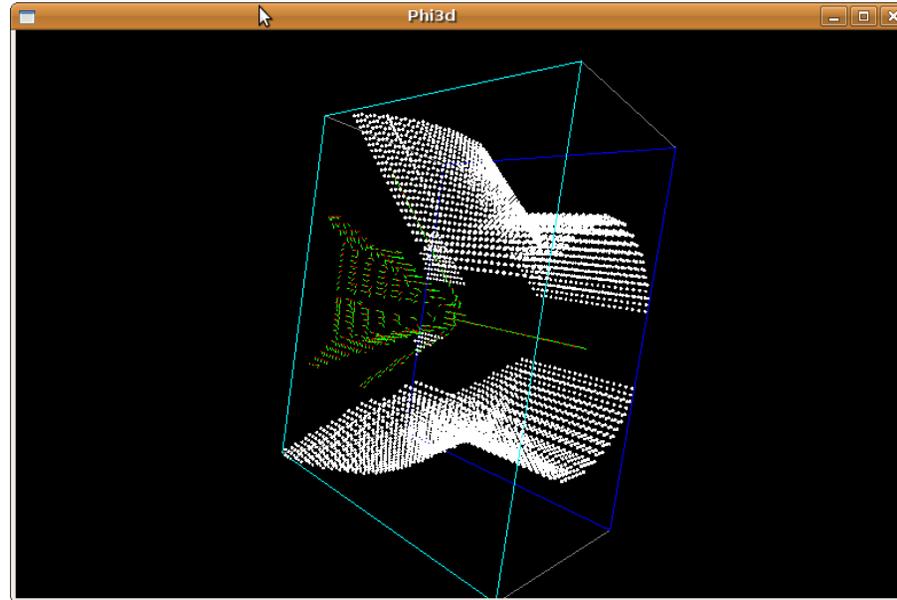
Application: coupe longitudinale

Géométrie 3D associée:



Application: coupe longitudinale

exemple de points du squelette 3D (C. Nguyen)



Travail de C. Nguyen: OpenGL

- intégrer les outils dans un logiciel "user friendly".
- Outils de traitement d'image interfacés.
- Ajout des informations nécessaires en mécanique des fluides.

The Super-Skeleton

The skeleton: $\cup_{x \in S} B(x, r(x))$

The Super-Skeleton: an extension of skeleton

position: $x \in \mathbb{R}^3$

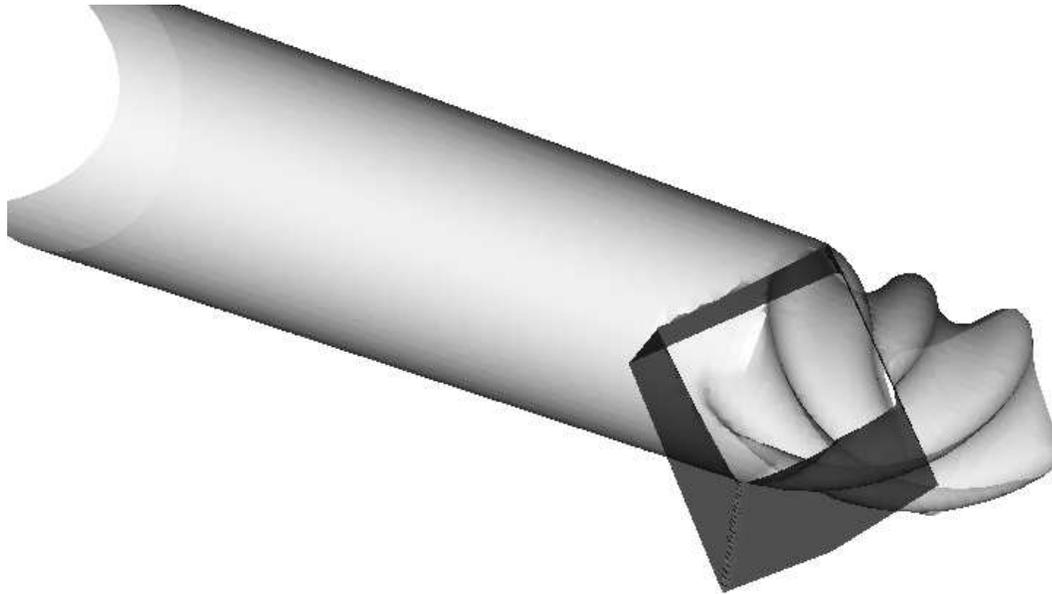
radius: $r(x) \in \mathbb{R}^+$

flow rate: $d(x) \in \mathbb{R}$ (useful for flow boundary conditions)

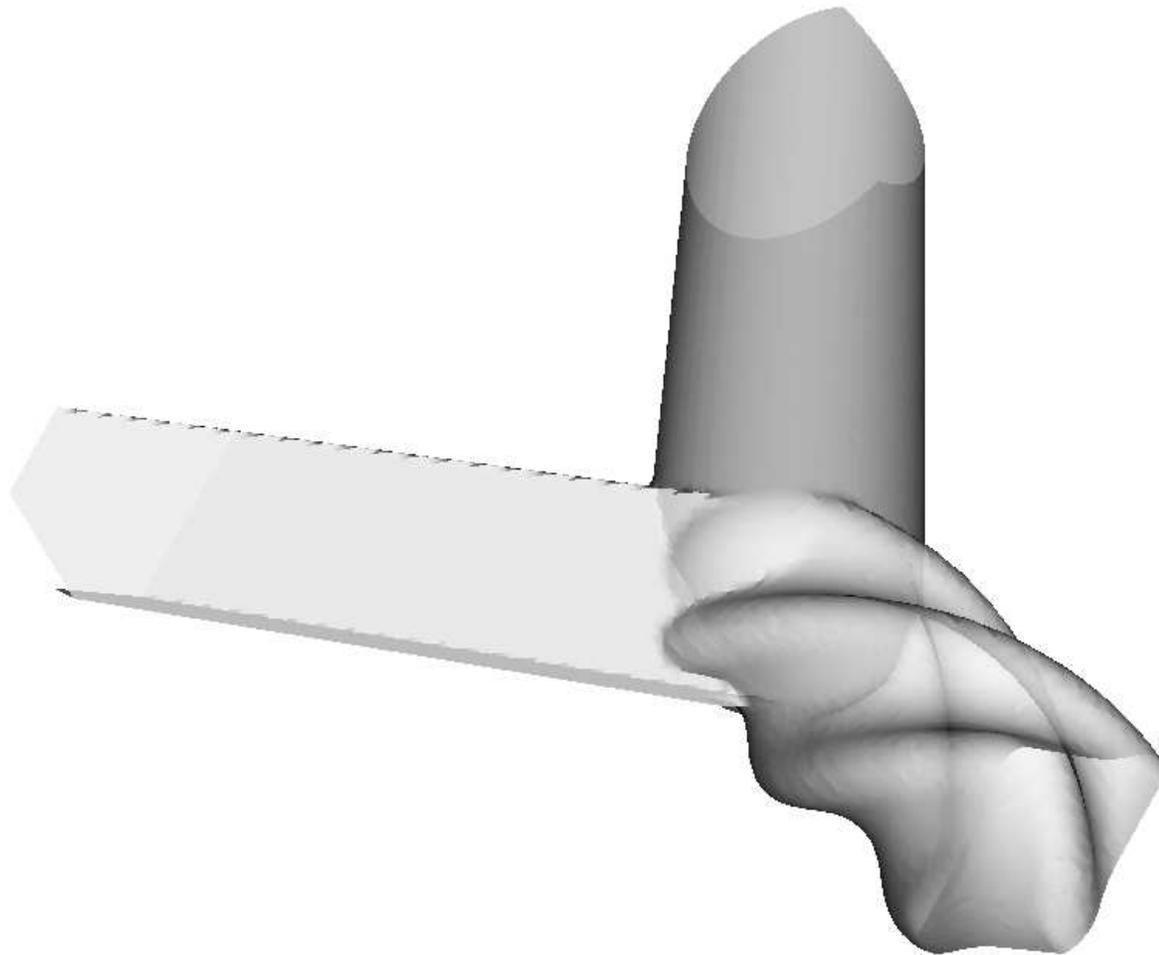
direction: $ds(x) \in \mathbb{R}^3$

transverse direction: $dst(x) \in \mathbb{R}^3$

choice of L^p norm: $p(x) \geq 1$



The Super-Skeleton



The Super-Skeleton

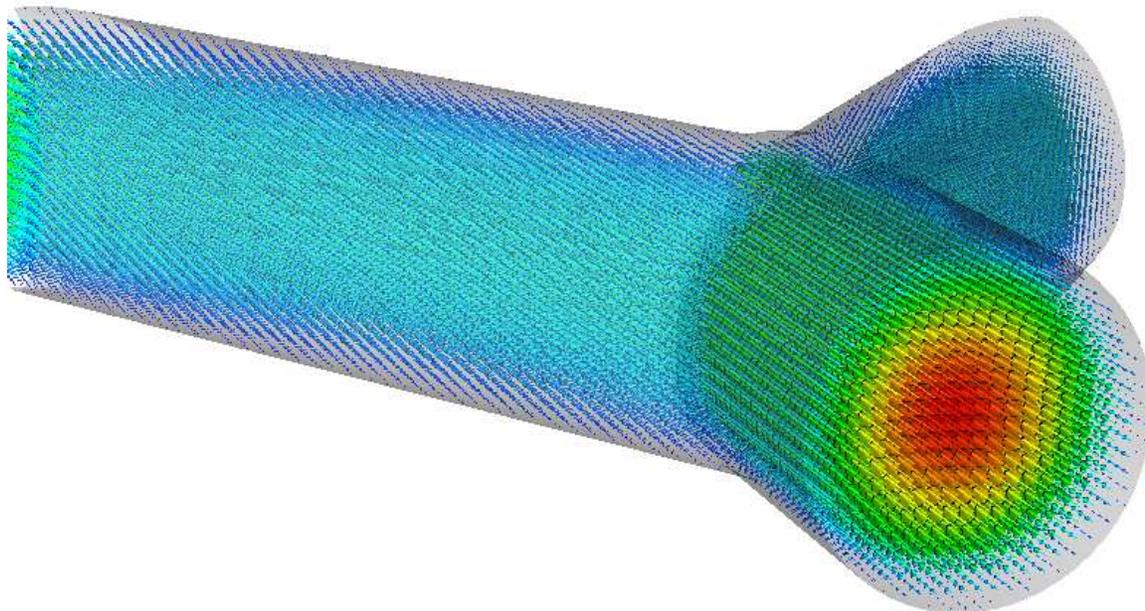
A natural flow associated to the skeleton S and the function ψ

The "Poiseuille like" velocities in tubing :

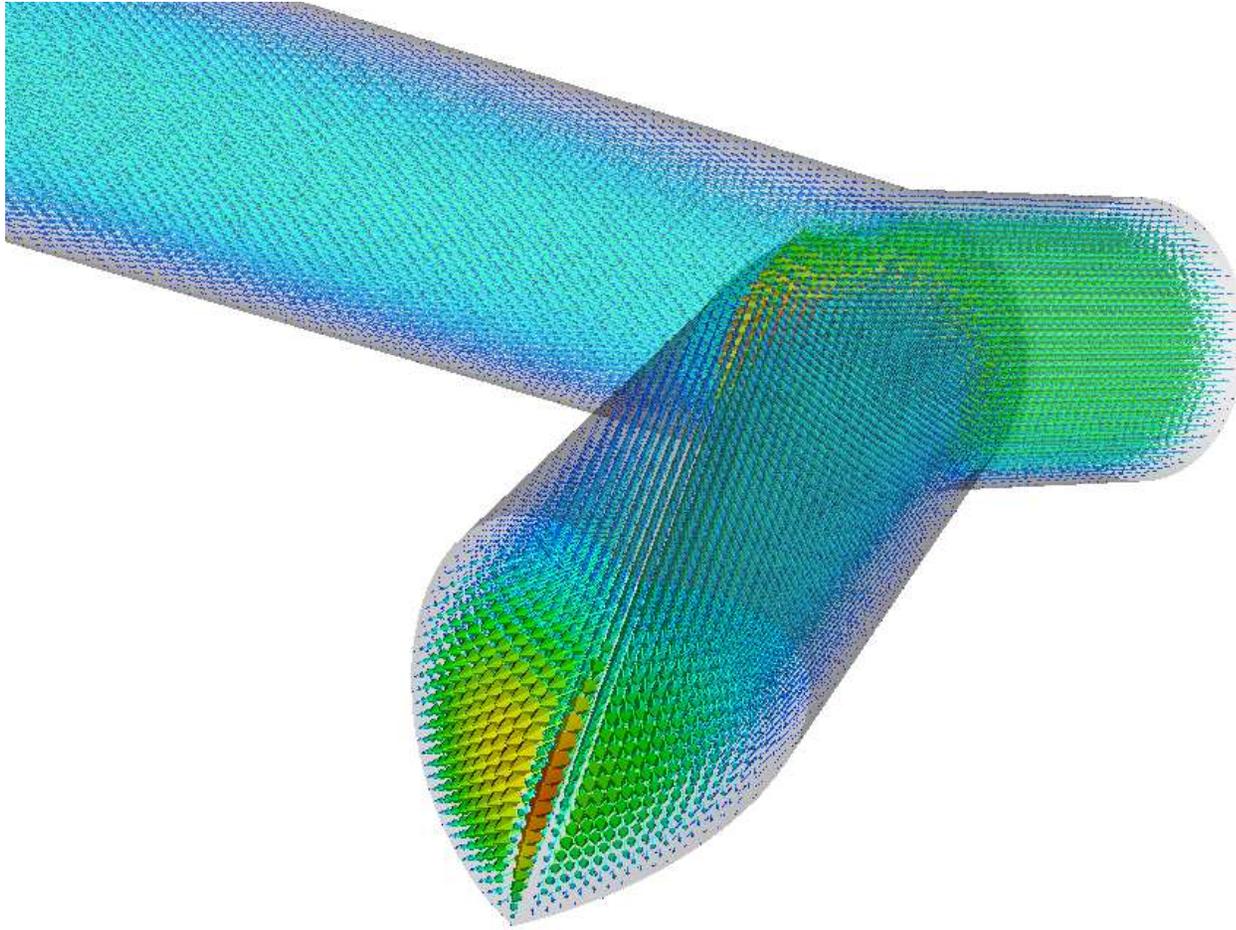
$$y \in \mathbb{R}^3, \text{ associated to } x \in S, V(y) = \alpha(\psi)\nabla\psi + \beta(\psi)ds(x),$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} V(y) \cdot \nabla\psi = 0, \quad \lim_{\psi \rightarrow -r(x)} V(y) = \beta(-r(x))ds(x)$$

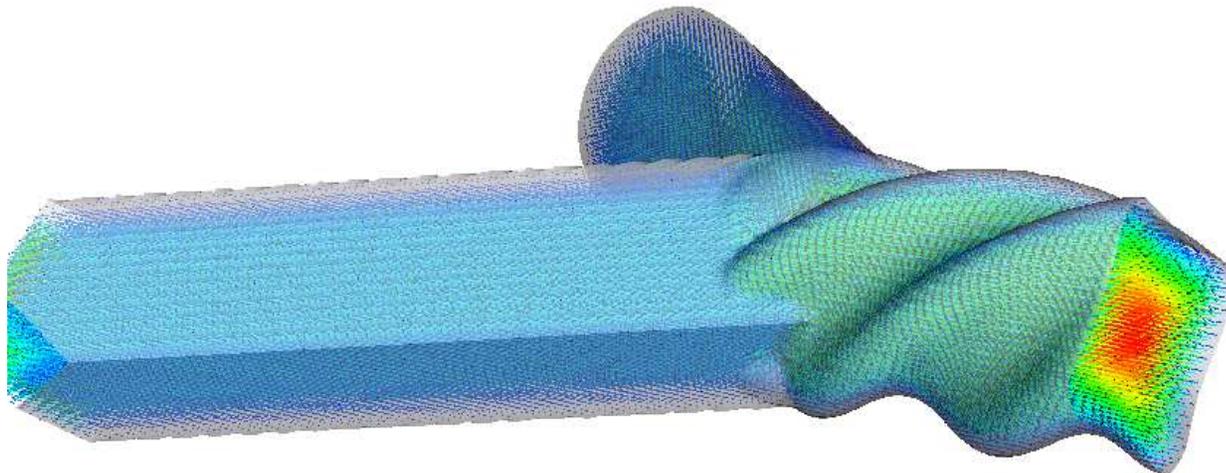
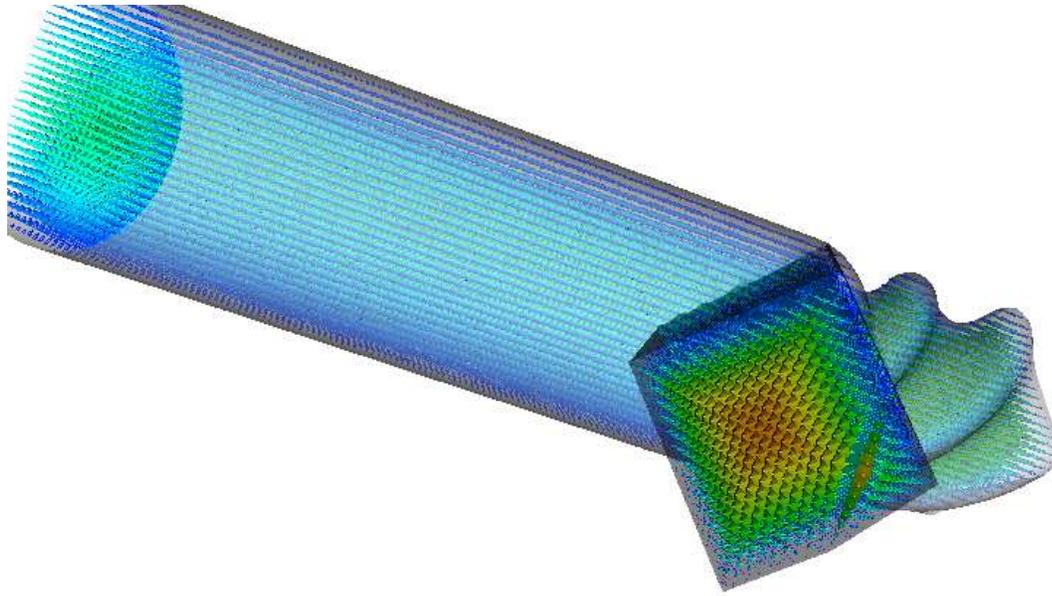
The flow is adapted to the flow rate $d(x)$ with parabolic profile depending on ψ .



The Super-Skeleton for velocities



The Super-Skeleton for velocities



Perspective pour la reconstruction de vaisseaux sanguins

Un Super-Skeleton décrit les vaisseaux sanguins

Une thèse financée par ANR Carpeinter (2009-2013) :

Traitement d'Image:

- reconnaitre la région des veines sur les coupes
- Associer un débit à chaque veine
- Distinguer les flots entrants des flots sortants

Définir le problème de transfert de masse pour connecter les flots entrants aux flots sortants

Première formulation:

Formulation directe d'un problème type "Monge-Kantorovich"

Ramener les coupes des veines à un point.

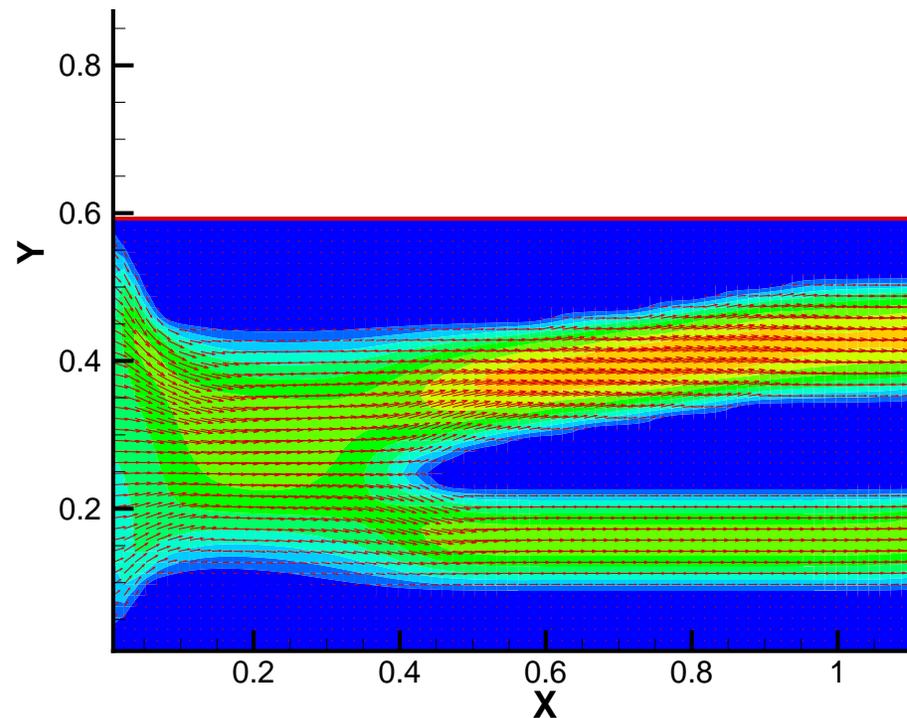
Les chemins du transport définissent le squelette des vaisseaux.

Le rayon des veines est relié au débit: la masse transportée le long du squelette.

Perspective pour la reconstruction de vaisseaux sanguins

Deuxième formulation: trop gourmand en 3D?

Un **écoulement incompressible** en milieu poreux à perméabilité fonction de la vitesse décrit le champ de vitesse de transport de masse. (Formulation biduale). (Le gradient de pression est selon l'écoulement et de module inférieur à 1)



Modelization

Notation: \vec{u}_i , p_i , ν_i , ρ_i : velocity, pressure and density of fluids i , $i = 1, 2$.

For each phase (i), **Navier-Stokes** incompressible equations:

$$\rho_i \frac{D}{Dt} \vec{u}_i - 2\nu_i \operatorname{div}(\mathbf{D}_i) + \nabla p_i = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_i = 0,$$

$$\frac{D}{Dt} \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u},$$

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u}_i + (\nabla \vec{u}_i)^t).$$

Continuity on the fluid interface Γ :

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2$$

$$\nu_1 \mathbf{D}_1 n - \nu_2 \mathbf{D}_2 n = (p_1 - p_2 + \sigma \kappa) n.$$

κ : mean curvature, $\sigma \kappa n$: tension surface forces.

Modelization

Monofluid formulation (Sussman *et al.* (1994)):

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \text{ or } \vec{u}_2, p = p_1 \text{ or } p_2, \nu = \nu_1 \text{ or } \nu_2, \rho = \rho_1 \text{ or } \rho_2,$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} - 2 \operatorname{div}(\nu \mathbf{D}) + \nabla p = -\sigma \kappa \delta_{\Gamma} n,$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Interface tracking: Level set.

Let $\varphi > 0$ where the fluid 1 is.

Interface Γ : Level set 0 of φ .

viscosity: $\nu = \nu(\varphi)$, density: $\rho = \rho(\varphi)$

Choose φ such that $|\nabla \varphi| \sim 1$.

Interface displacement: transport equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \vec{u} \cdot \nabla \varphi = 0.$$

Redistanciation: sometimes solve

$$|\nabla \varphi| = 1.$$

with fixed level set $\varphi = 0$.

Discretization

Time Discretization

$$\rho(\varphi^n) \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\Delta t} - \operatorname{div}(\nu(\varphi^n)(\nabla \vec{u}^{n+1} + (\nabla \vec{u}^{n+1})^t)) + \rho(\varphi^n) \vec{u}^n \cdot \nabla \vec{u}^n + \nabla p^{n+1} = -\sigma \kappa^n \nabla(H(\varphi^n)),$$

$$\operatorname{div} \vec{u}^{n+1} = 0,$$

$$\kappa^n = \operatorname{div} \frac{\nabla \varphi^n}{|\nabla \varphi^n|},$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + \vec{u}^{n+1} \cdot \nabla \varphi^n = 0.$$

Augmented Lagrangian for incompressibility.

Space Discretization

Cartesian uniform grid on a box containing the domain.

Domain defined by the Level Set function $\psi < 0$.

Conclusion:

Geometry with Level Set.

Multifluid with Level Set.

Condition limite

La géométrie est approchée sur grille cartésienne.

La condition de **non glissement** peut être forcée (pénalisation par exemple) où $\psi < 0$.

Éliminer l'effet de grille au bord de la géométrie

La condition d'adhérence est remplacée aux noeuds de grille du bord par une condition assurant à l'ordre 2:

$$\vec{u} = 0 \text{ où } \psi = 0.$$

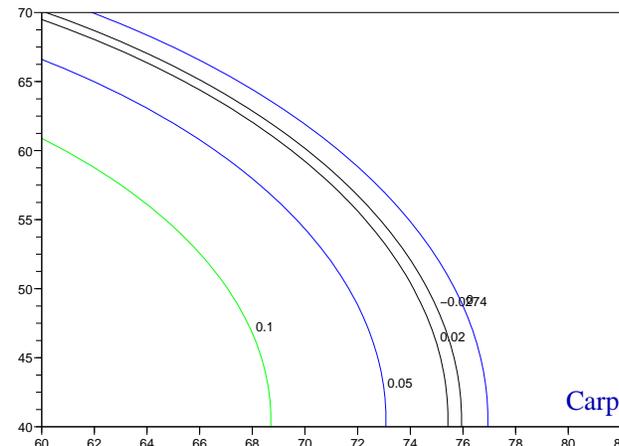
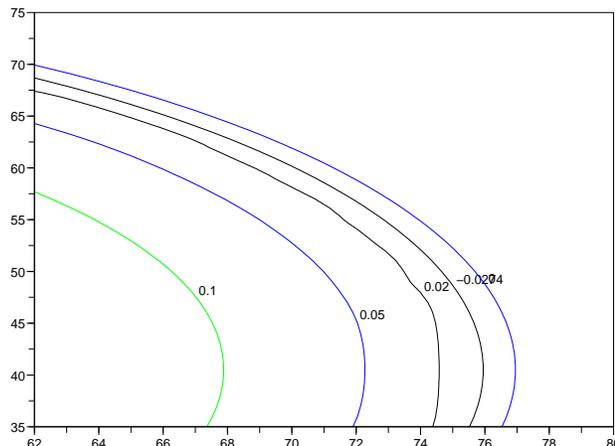
(Voir F. Chantalat et al., JCP).

La condition est

$$\vec{u} = \psi \nabla \psi \cdot \nabla \vec{u}$$

(\vec{u} est étendu par un prolongement affine le long de la normale).

Perspective: résolution directe et non itérative avec CL aux derniers points où $\psi < 0$. Ok sur Laplace:

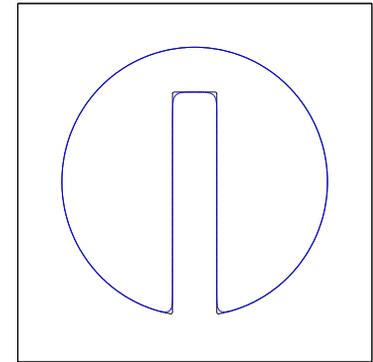
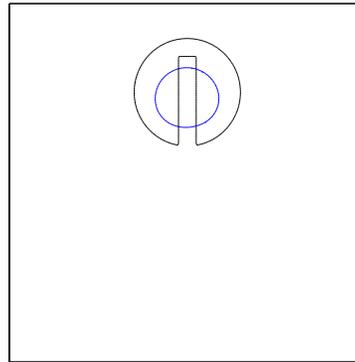
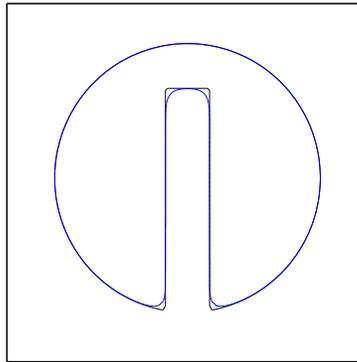


Numerical cost

Fluid solver is costly

Choose a Level set transport on grid 3 times thinner than for the fluid solver:

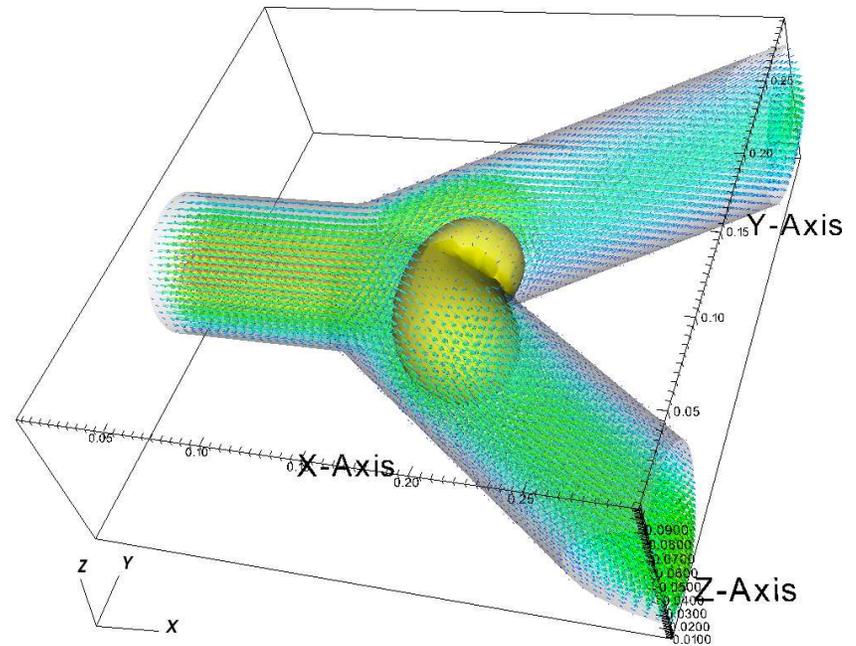
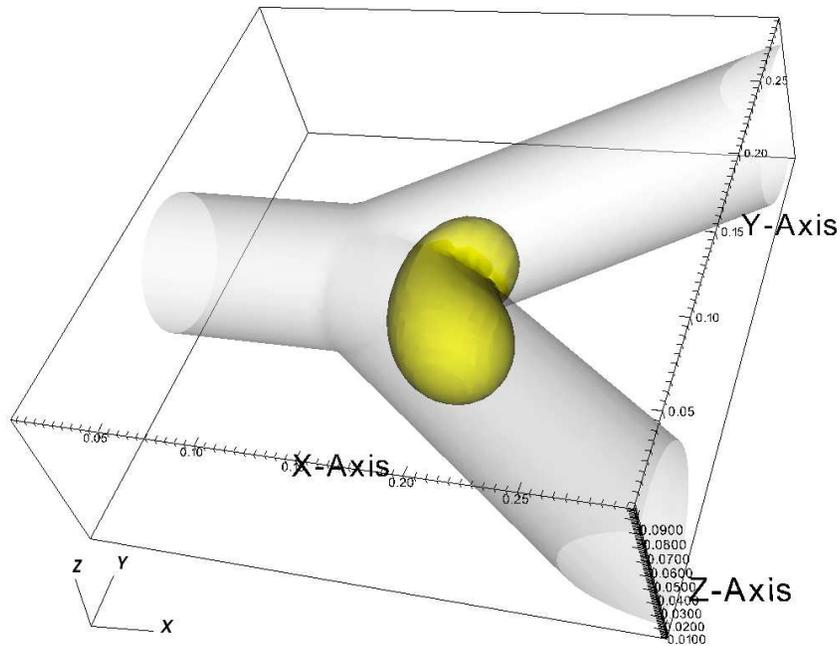
- Interpolate the velocity on the fine grid
- less expensive than fluid solver.
- WENO5 scheme for transport of smooth function is efficient on fine grid.
- Alternative to Particle Level set method.



Zalesak 200*200 WENO5/ordre1, Zalesak 400*400 WENO5

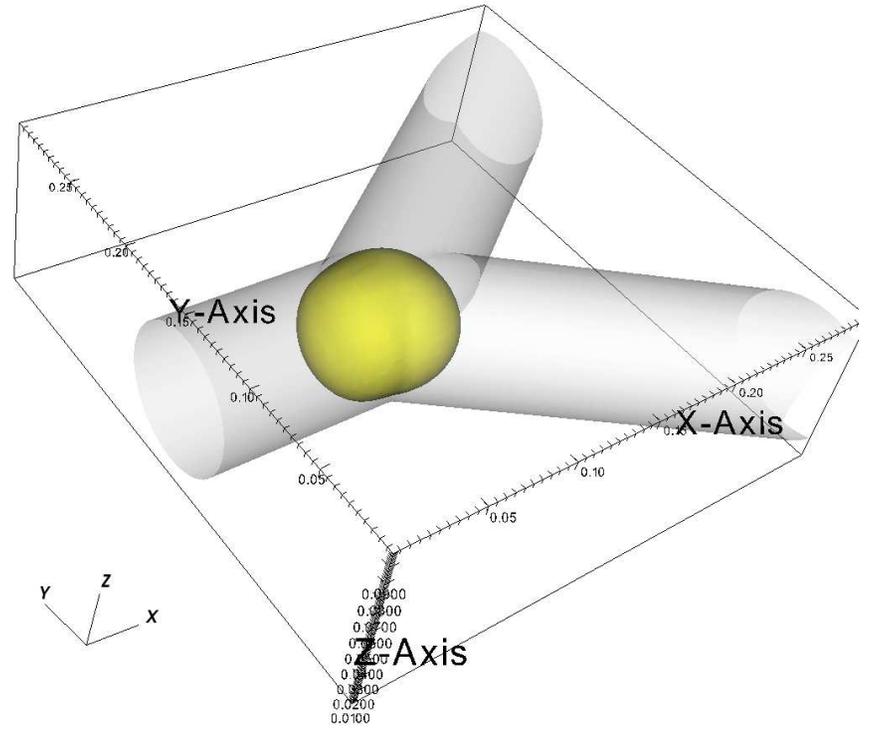
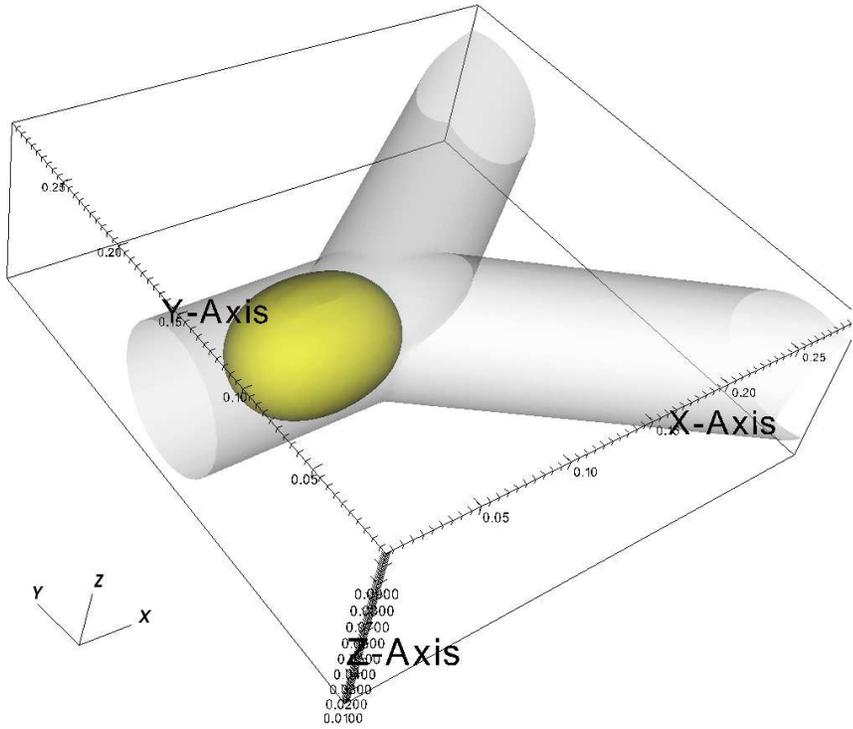
Conclusion: no precision loss on interface tracking (with [mesh refinement](#)) compare to loss on fluid solver.

Application: Ecoulement bifluide dans un Y



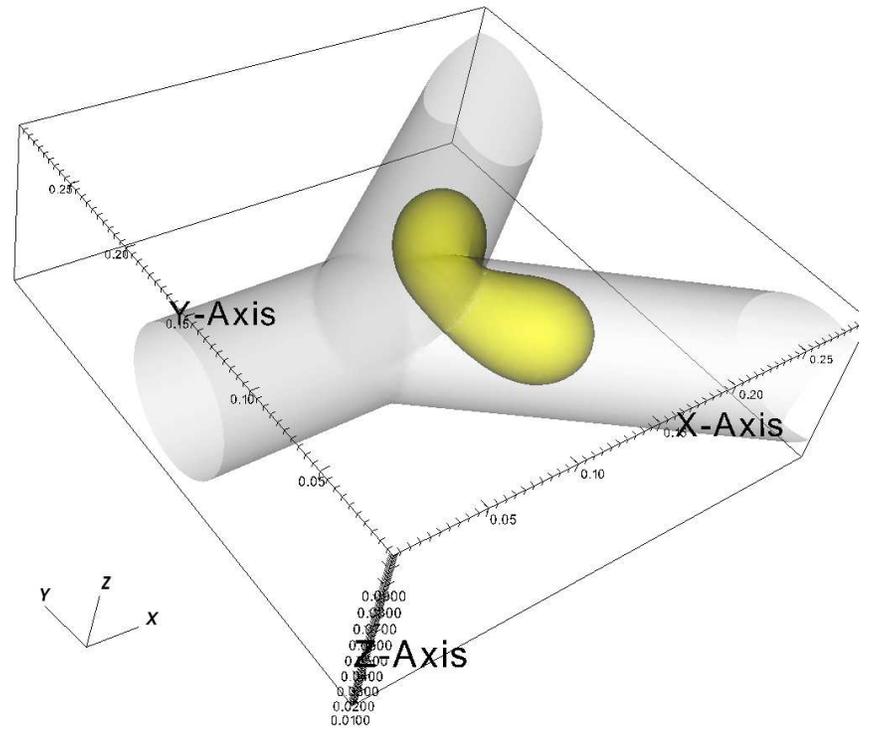
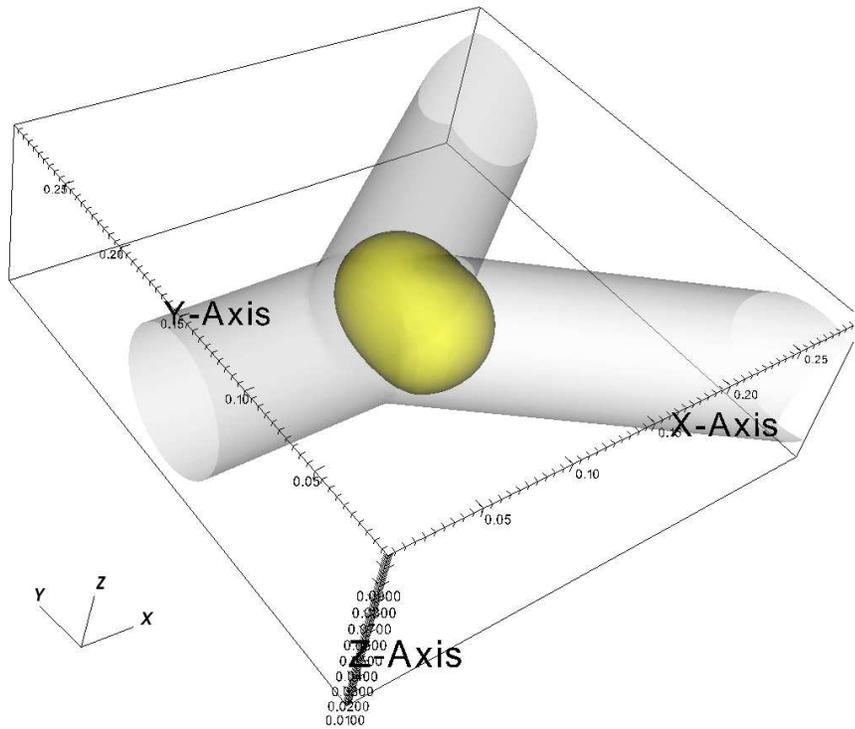
Ecoulement bifluide lent (effet visqueux et de tension de surface en jeu). Ecoulement disymétrique.

Application: bifluid flows in tubing



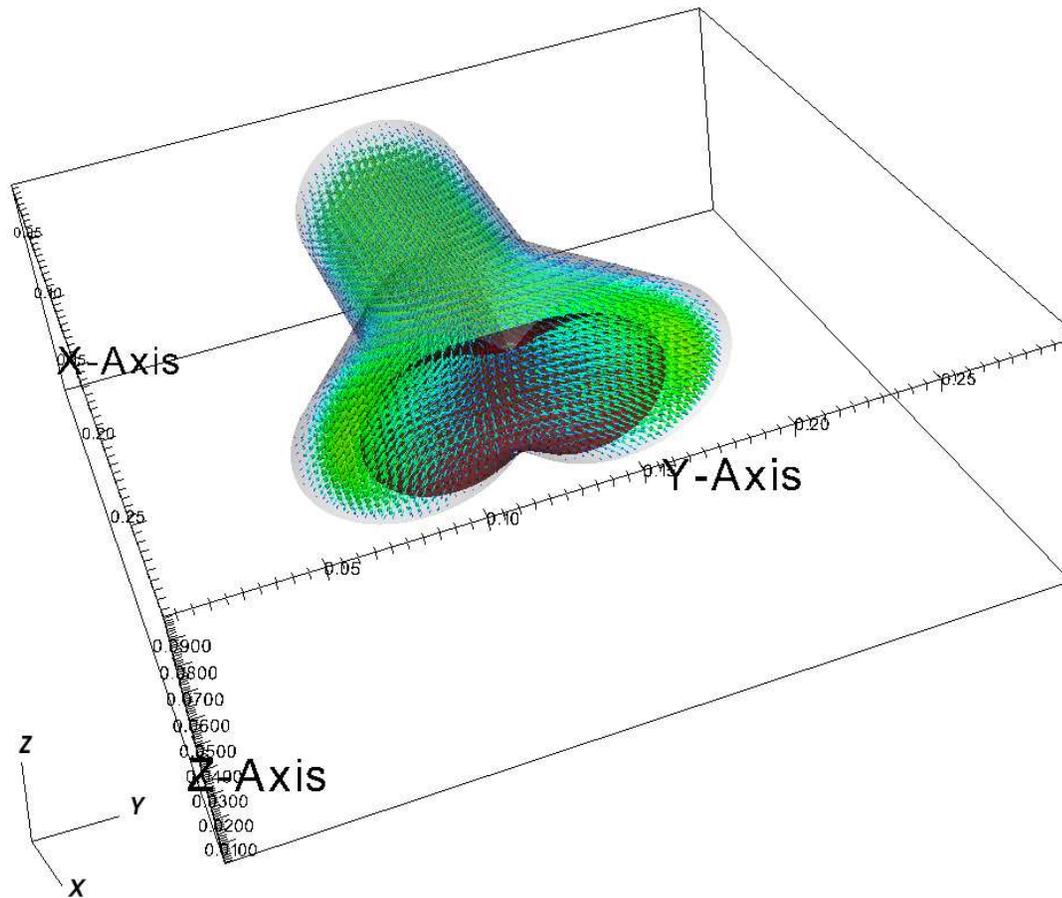
Écoulement symétrique.

Application: Ecoulement bifluide dans un Y

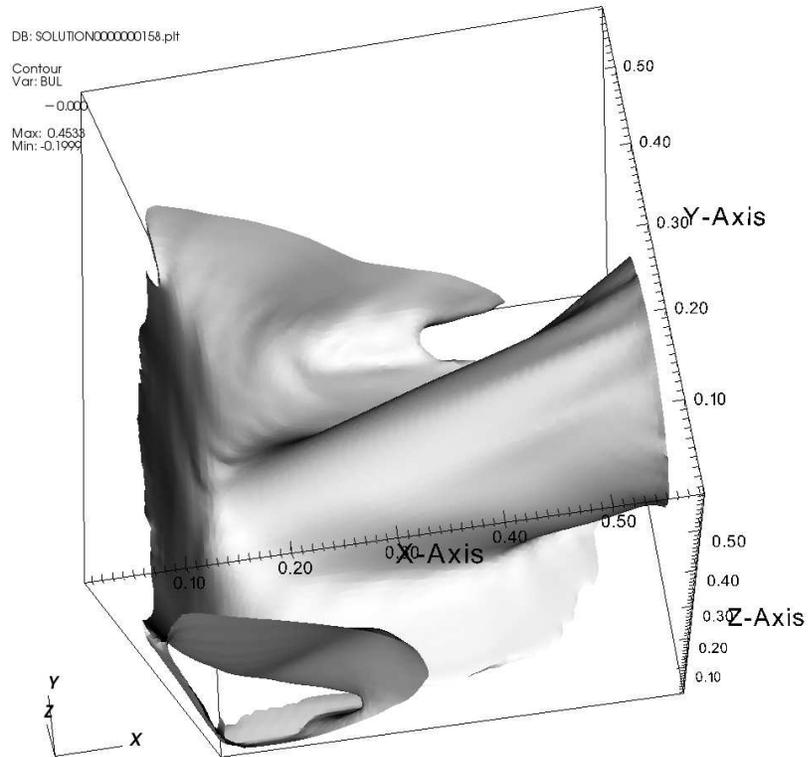


Ecoulement symétrique.

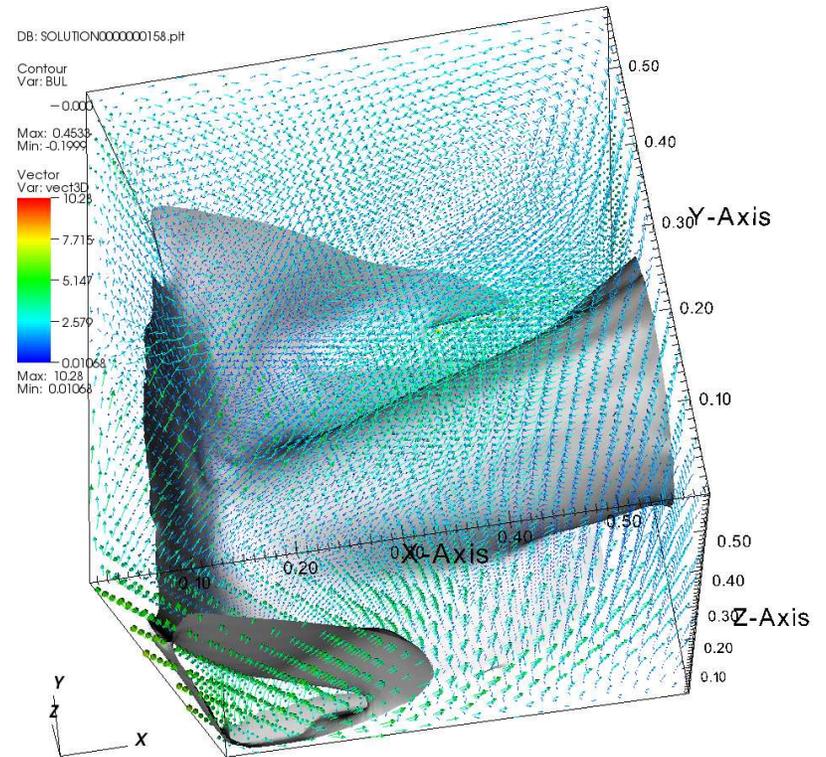
Application: Ecoulement bifluide dans un Y



Application Air-Water



user: cedricgalusinski
Fri Jan 16 15:47:55 2009



user: cedricgalusinski
Fri Jan 16 15:46:33 2009

Water jet in an air box.

Conclusion Perspectives

Squelette et Level Set pour la géométrie:

- un outil simple pour des géométries complexes
- grille cartésienne uniforme!

Level set pour les interfaces fluides:

- efficace et simple
- grille plus fines que pour le solveur fluide

Perspectives:

- Extension multifluide (plus de trois phases).
- Gestion des forts ratios de densité?
- Solveur fluide sur grille composite (AMR) (solveur 3D DDFV, F. Hubert et al.)
- Reprendre les outils de suivi d'interface sur zone cartésienne uniforme (grille fine)