Approche eulérienne du couplage fluide-structure, applications aux biolocomotions

Thomas MILCENT

INRIA Bordeaux, Equipe MC2

5 novembre 2009

Contexte physique

Objectif : Simuler et optimiser la nage des poissons

Modèle de poisson

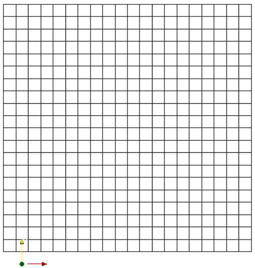
- Couplage fluide-structure incompressible
- Partie rigide $\longrightarrow$ Méthode de pénalisation
- Partie élastique $\longrightarrow$ Elasticité eulérienne

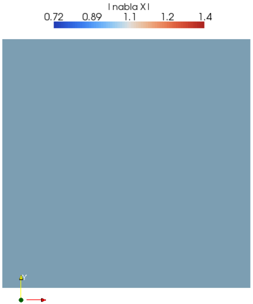
Structure élastique

Equations de l'élasticité incompressible en description lagrangienne

- $X(\xi, t)$: position du marqueur ξ
- $\mathcal{E}(X) = \int_{\Omega_0} W(\nabla_\xi X(\xi, t))\, d\xi$: énergie élastique
- $\mathcal{T}(X) = W'(\nabla_\xi X(\xi, t))$: 1er tenseur de Piola Kirchhoff

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \mathrm{div}_\xi(\mathcal{T}(X)) & = & f \text{ sur } \Omega_0 \\ \det(\nabla X) & = & 1. \end{array} \right.$$

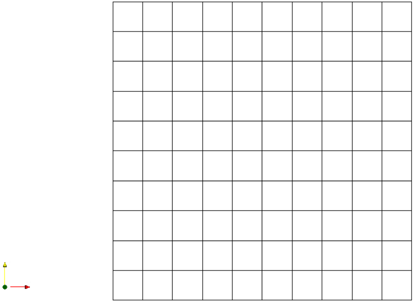




Fluide

Equations de Navier-Stokes incompressible en description eulérienne.

- u(x,t) : champ de vitesse
- $p(x,t)$: pression
- $\sigma(x,t) = -p\ I + \mu([\nabla_x u] + [\nabla_x u]^T)$: tenseur des contraintes

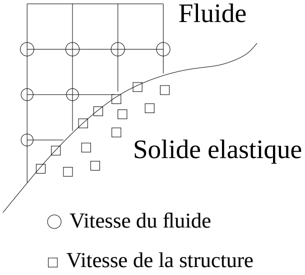


$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(u_t + (u\cdot\nabla)u) - \mathrm{div}(\sigma) & = & f, \quad \text{sur} \quad \Omega_t \\ \mathrm{div}(u) & = & 0. \end{array} \right.$$

Couplage fluide-structure

Couplage des modèles à l'interface

- Continuité de la vitesse
- Continuité du tenseur des contraintes



Difficultés

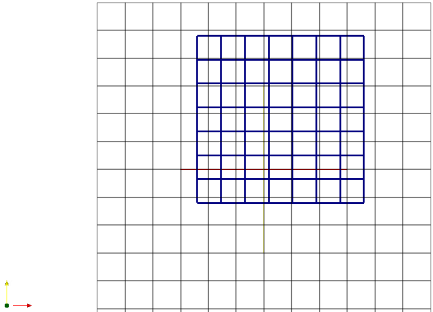
- Couplage de modèles écrits dans des formulations différentes
- Traitement de la frontière libre du fluide
- Interpolations à l'interface

Méthode de frontière immergée de Peskin (1977)

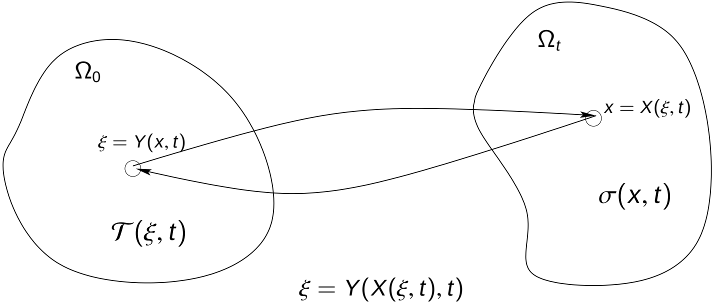
Idée : traiter l'élasticité (incompressible) comme un terme source

- $X(\xi, t)$: position du marqueur lagrangien ξ au temps t
- $F(X(\xi, t))$: force élastique calculée de manière lagrangienne

$$\begin{cases} \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) - \mu\Delta u + \nabla p & = & F(X), \\ \frac{\partial X}{\partial t} & = & u(X, t), \\ \operatorname{div}(u) & = & 0. \end{cases}$$



Lien Eulérien/Lagrangien



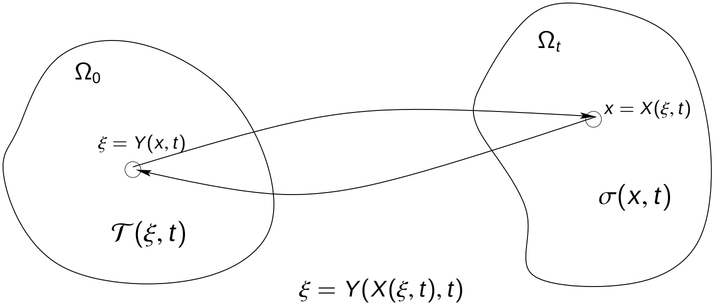
Caractéristiques directes X

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(\xi,t) & = & u(X(\xi,t),t) \\ X(\xi,0) & = & \xi. \end{cases}$$

Caractéristiques rétrogrades Y

$$\begin{cases} Y_t(x,t) + u(x,t)\cdot\nabla_x Y(x,t) & = & 0 \\ Y(x,0) & = & x. \end{cases}$$

Lien Eulérien/Lagrangien



Caractéristiques directes X

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial X}{\partial t}(\xi,t) & = & u(X(\xi,t),t) \\ X(\xi,0) & = & \xi. \end{array} \right.$$

Caractéristiques rétrogrades Y

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_t(x,t) + u(x,t)\cdot\nabla_x Y(x,t) & = & 0 \\ Y(x,0) & = & x. \end{array} \right.$$

$\longrightarrow$ X et Y contiennent l'information sur la distance entre les points

Elasticité Eulérienne

Un milieu est dit élastique si sa loi de comportement dépend de $\nabla_\xi X$.

$B(\xi, t) = \nabla_\xi X \nabla_\xi X^T$: Tenseur de Cauchy-Green à droite

Elasticité Eulérienne

Un milieu est dit élastique si sa loi de comportement dépend de $\nabla_\xi X$.

$B(\xi, t) = \nabla_\xi X \nabla_\xi X^T$: Tenseur de Cauchy-Green à droite

Théorème (Rivlin-Ericksen)

Si un milieu élastique est isotrope et satisfait l'AIM alors $\sigma = \tilde{\sigma}(B(\xi, t))$ *et*

$$\tilde{\sigma}(B) = \gamma_0(\iota_B)I + \gamma_1(\iota_B)B + \gamma_2(\iota_B)B^2$$

$\longrightarrow$ Inutilisable tel quel car $B(\xi, t)$ est définit sur le domaine lagrangien

En dérivant $Y(X(\xi, t), t) = \xi$

$$[\nabla_\xi X](\xi, t) = [\nabla_x Y]^{-1}(x, t) \qquad B = [\nabla_x Y]^{-1}[\nabla_x Y]^{-T}$$

Elasticité Eulérienne linéarisée

On introduit

$$Y(x,t) = x + \tilde{Y}(x,t)$$

Hypothèse de petites déformations

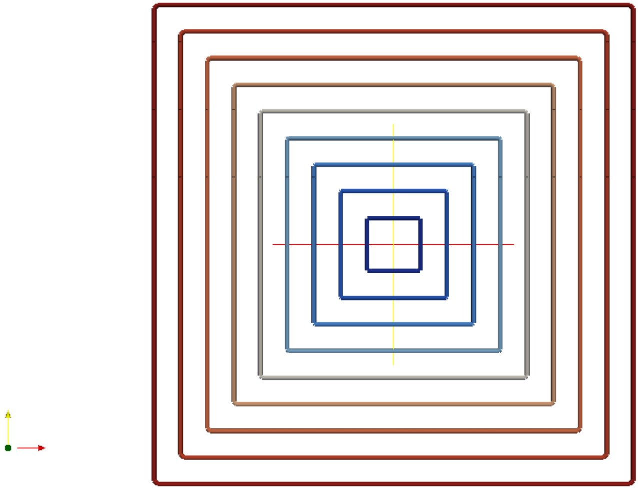
- $''\nabla\tilde{Y} << I''$
- on néglige $(u \cdot \nabla)u$

Modèle eulérien linéarisé

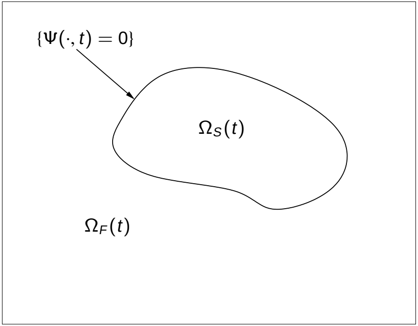
$$\begin{cases} \rho u_t + \lambda\Delta\tilde{Y} + \mu\nabla(\operatorname{div}\tilde{Y}) + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \\ \tilde{Y}_t + u \cdot \nabla\tilde{Y} &= -u \\ u_{|\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

avec λ et μ les coefficents de Lamé

Illustration numérique



Modèle fluide/structure incompressible



$$\Omega = \Omega_F \cap \Omega_S$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(\Psi)\frac{Du}{Dt} - div(\sigma(u,Y)) + \nabla p & = & f, \\ \mathrm{div}(u) & = & 0, \\ Y_t + u\cdot\nabla Y & = & 0 \\ u_{|\partial\Omega} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma(u,Y) = H(\Psi)\sigma_S(Y) + (1 - H(\Psi))\sigma_F(u)$$

L'interface est calculée avec

$$\Psi(x,t) = \Psi_0(Y(x,t))$$

Articles

- G.-H Cottet, E. Maitre and T. Milcent : *Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal 42, p417-492 (2008)
- E. Maitre, T. Milcent, G.-H Cottet, A. Raoult, Y. Usson : *Applications of level set methods in computational biophysics*, Math. Comput. Model 49 (11-12), 2161 -2169 (2009)