Convergence et fluctuations des valeurs propres extrémales des matrices de Wigner déformées

C. Donati-Martin

LPMA-UPMC

avec M. Capitaine et D. Féral

Journées MAS - Bordeaux 2010

Décrire le comportement asymptotique des valeurs propres extrémales dans des modèles matriciels classiques (Wigner, Wishart) perturbés.

Matrices de covariance empirique

$$S_N = \frac{1}{p(N)} \Sigma^{1/2} Y_N Y_N^* \Sigma^{1/2}$$

$Y_N = (X_1, \ldots, X_{p(N)})$, X_i vecteurs de $\mathbb{C}^N$ iid centrés à coefficients indépendants, de variance 1.

$$\Sigma = diag(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m, 1, \ldots, 1)$$

où $\theta_1 \geq \ldots \theta_m > 1$. $p(N)/N \longrightarrow \lambda \geq 1$.

Johnstone (2001)
Baik-Ben Arous-Péché (2005): cas Gaussien complexe

- Convergence de la mesure spectrale μ_{S_N} vers la loi de Marchenko-Pastur μ_λ à support dans $[a_\lambda, b_\lambda]$.

- Convergence de $\lambda_{\max}$: transition de phase selon la valeur de θ_1

$$\lambda_{\max}(S_N) \underset{N \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} b_\lambda & \text{si } \theta_1 \leq 1 + 1/\sqrt{\lambda} \\ \rho_{\theta_1} & \text{si } \theta_1 > 1 + 1/\sqrt{\lambda} \end{cases}$$

où $\rho_{\theta_1} := \theta_1(1+\frac{1}{\lambda(\theta_1-1)})$ $(\geq b_\lambda)$.

TCL pour $\lambda_{\max}$: θ_1 de multiplicité k

1) si $1 \leq \theta_1 < 1+1/\sqrt{\lambda}$,

$$N^{2/3}C_\lambda\left(\lambda_{\max}(S_N)-b_\lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_2 := F_{TW}$$

2) si$\theta_1 = 1+1/\sqrt{\lambda}$,

$$N^{2/3}C_\lambda\left(\lambda_{\max}(S_N)-b_\lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_{k+2}$$

3) si $\theta_1 > 1+1/\sqrt{\lambda}$,

$$N^{1/2}C_{\lambda,\theta_1}\left(\lambda_{\max}(S_N)-\rho_{\theta_1}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{G}_k$$

où $\mathcal{G}_k$ est la loi de la plus grande valeur propre de GUE$(k\times k)$ ($\mathcal{G}_1$ est une loi gaussienne).

Perturbation additive d'une matrice de Wigner

$$M_N = X_N + A_N := \frac{1}{\sqrt{N}} W_N + A_N$$

où W_N est une matrice de Wigner de taille N : $(W_N)_{ii}$, $\sqrt{2}Re((W_N)_{ij})_{i<j}$, $\sqrt{2}Im((W_N)_{ij})_{i<j}$ sont iid de loi μ centrée, de variance σ^2.
A_N est une perturbation déterministe de rang r fixé.

Exemple: $\mu = N(0;\sigma^2)$, $X_N \sim GUE(N, \frac{\sigma^2}{N})$.

Quelques résultats classiques dans le cas non déformé ($A_N = 0$)

- Convergence de la mesure spectrale $\mu_{X_n} := \frac{1}{N}\sum_i \delta_{\lambda_i(X_N)}$ vers la loi semicirculaire $\mu_{sc} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}1_{[-2\sigma,2\sigma]}$.
- Convergence p.s. de $\lambda_{max}(X_N)$ vers 2σ (le bord droit du support de la loi limite)
- Fluctuations (Tracy-Widom, Soshnikov)

$$\sigma^{-1}N^{2/3}\left(\lambda_{max}(X_N) - 2\sigma\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{ T-W distribution } F_2$$

La déformation A_N Hermitienne de rang r (independant de N) de valeurs propres θ_i de multiplicité k_i; $\theta_1 > \theta_2 > \ldots > \theta_J$.
Convergence de la mesure spectrale de M_N vers la loi semicirculaire μ_{sc} de variance σ^2.

Comportement des valeurs propres extremales?

1) Le cas gaussien (Péché)

Ex: θ_1 de multiplicité 1.

1) si $0 \leq \theta_1 < \sigma$, $\quad \sigma^{-1} N^{2/3} (\lambda_{max}(M_N) - 2\sigma) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_2$

2) si $\theta_1 = \sigma$, $\quad \sigma^{-1} N^{2/3} (\lambda_{max}(M_N) - 2\sigma) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_3$

3) si $\theta_1 > \sigma$, $\quad N^{1/2} (\lambda_{max}(M_N) - \rho_{\theta_1}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{\theta_1})$ où
$\rho_{\theta_1} = \theta_1 + \frac{\sigma^2}{\theta_1} > 2\sigma$.

2) Le cas non gaussien pour A_N particulier (Féral-Péché)

A_N est définie par $(A_N)_{ij} = \frac{\theta}{N}$. $r = 1$ et $\theta_1 = \theta$.

Même TCL que dans le cas gaussien, universalité des fluctuations (independant de μ, la loi des coefficients).

approche de Soshnikov (calculs de traces $\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_N)^{2s_N})$).

Füredi-Komlòs (1981)
Maïda (2007) : GD pour GOE + matrice de rang 1

Convergence des valeurs propres extremales de M_N

Théorème 1 *(Hypothèses de moments sur μ, μ symétrique) Soit $J_{+\sigma}$ (resp. $J_{-\sigma}$) le nombre de j's tel que $\theta_j > \sigma$ (resp. $\theta_j < -\sigma$).*

(a) $\forall 1 \leq j \leq J_{+\sigma},\ \forall 1 \leq i \leq k_j,$

$$\lambda_{k_1+\cdots+k_{j-1}+i}(M_N) \longrightarrow \rho_{\theta_j} = \theta_j + \frac{\sigma^2}{\theta_j} \quad p.s.,$$

(b) $\lambda_{k_1+\cdots+k_{J_{+\sigma}}+1}(M_N) \longrightarrow 2\sigma \quad p.s.,$

(c) $\lambda_{k_1+\cdots+k_{J-J_{-\sigma}}}(M_N) \longrightarrow -2\sigma \quad p.s.,$

(d) $\forall j \geq J - J_{-\sigma} + 1, \forall 1 \leq i \leq k_j,$

$$\lambda_{k_1+\cdots+k_{j-1}+i}(M_N) \longrightarrow \rho_{\theta_j} \quad p.s.$$

FLUCTUATIONS:

1) $A_N = \mathrm{diag}(\theta, 0, \cdots, 0)$ avec $\theta > \sigma$. Alors,

$$(1 - \frac{\sigma^2}{\theta^2})^{-1} \sqrt{N} \Big(\lambda_{max}(M_N) - \rho_\theta \Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Big\{ \mu * \mathcal{N}(0, v_\theta) \Big\}.$$

où

$$v_\theta = \frac{1}{2} \Big(\frac{m_4 - 3\sigma^4}{\theta^2} \Big) + \frac{\sigma^4}{\theta^2 - \sigma^2}; \quad m_4 := \int x^4 d\mu(x).$$

2) D'après Féral-Péché, pour $A_N = \begin{pmatrix} & \cdots & \\ & \frac{\theta}{N} & \\ & \cdots & \end{pmatrix}$,

$$\sqrt{N} \Big(\lambda_{max}(M_N) - \rho_\theta \Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$$

$$a)\ A_N = \mathrm{diag}(\theta, 0, \cdots, 0) \quad \longrightarrow \quad X_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A_N = \begin{pmatrix} & \cdots & \\ & \frac{\theta}{N} & \\ & \cdots & \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad X_\theta = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Influence des vecteurs propres de A_N

a) Les k_1 vecteurs propres normalisés u_i associés à θ_1 sont localisés : $u_i \in \mathrm{Vect}(e_j, j \leq n_1)$, n_1 et $U_{n_1 \times k_1} = (u_1, \dots, u_{k_1})$ sont indépendants de N.

$$c_{\theta_1}\sqrt{N}(\lambda_{max}(M_N) - \rho_{\theta_1})$$

converge en loi vers la v.p. maximale de V_{k_1} de taille k_1:

$$V_{k_1} = U^*_{n_1 \times k_1}(W_{n_1} + H_{n_1})U_{n_1 \times k_1}.$$

W_{n_1} matrice de Wigner de taille n_1 associée à μ
H_{n_1}: matrice hermitienne gaussienne centrée de taille n_1
H_{n_1} et W_{n_1} sont indépendants

b) Les vecteurs propres normalisés v_i, $1 \leq i \leq k_1$ de A_N associés à θ_1 sont dans Vect$(e_1, \ldots, e_{n_1})$ où $n_1 = n_1(N) \to \infty$ quand $N \to \infty$ et les coordonnées satisfont :

$$\forall i \leq k_1, \forall l \leq n_1, \; |(v_i, e_l)| \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

Alors,

$$c_{\theta_1} \sqrt{N} (\lambda_{max}(M_N) - \rho_{\theta_j})$$

converge en loi vers la v.p. maximale de

$$GUE(k_1 \times k_1, \frac{\theta_1^2 \sigma^2}{\theta_1^2 - \sigma^2}).$$

Eléments de Preuve du Théorème 1: Montrer que

$$Spect(M_N) \subset K_\sigma(\theta_1, \ldots \theta_J) + [-\epsilon, +\epsilon] \tag{1}$$

pour N grand, où $K_\sigma(\theta_1, \cdots, \theta_J) :=$

$$\left\{\rho_{\theta_J}; \cdots; \rho_{\theta_{J-J_{-\sigma}+1}}\right\} \cup [-2\sigma; 2\sigma] \cup \left\{\rho_{\theta_{J_{+\sigma}}}; \cdots; \rho_{\theta_1}\right\}.$$

Outil : La transformation de Stieltjes: pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$,

$$g_N(z) = \int \frac{1}{z-x} d\mu_{M_N}(x); \; h_N(z) = \mathbb{E}[g_N(z)].$$

$$h_\sigma(z) = \int \frac{1}{z-x} d\mu_{sc}(x).$$

But : Obtenir une estimation

$$h_\sigma(z) - h_N(z) + \frac{1}{N} L_\sigma(z) = O(\frac{1}{N^2}) \tag{2}$$

où L_σ est la transformée de Stieltjes d'une distribution η à support dans K_σ.
A l'aide de la transformée de Stieltjes inverse,

$$\mathbb{E}[\mathrm{tr}_N(\varphi(M_N))] = \int \varphi(x) d\mu_{sc}(x) + \frac{1}{N} \int \varphi(x) d\eta(x) + O(\frac{1}{N^2}),$$

pour φ régulière à support compact;
et des contrôles de variance, on déduit de (2)

$$\mathrm{tr}_N \, 1_{{}^c K_\sigma^\varepsilon(\theta_1, \cdots, \theta_J)}(M_N) = O(1/N^{\frac{4}{3}}) \; a.s.$$

et donc l'inclusion du spectre (1).

Preuve de (2):

1) Le cas gaussien:

- La formule d'intégration par parties gaussienne

$X_N \sim GUE(N, \frac{\sigma^2}{N})$, $\Phi : \mathcal{H}_N(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$,

$$\forall H \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C}),\ \frac{N}{\sigma^2}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(X_N H)\Phi(X_N)] = \mathbb{E}[\Phi'(X_N) \cdot H]$$

Prenons $\Phi(X_N) = [(zI_N - X_N - A_N)^{-1}]_{kl} = G_N(z)_{kl}$ et $H = E_{kl}$; puis en sommant en k and l:

$$\to \sigma^2 \mathbb{E}[g_N^2(z)] - z\mathbb{E}[g_N(z)] + 1 + \frac{1}{N}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(G_N(z)A_N)] = 0$$

$$\to \sigma^2 h_N^2(z) - zh_N(z) + 1 + \frac{1}{N}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(G_N(z)A_N)] = O(\frac{1}{N^2})$$

Rappelons que h_σ est solution de $\sigma^2 h_\sigma^2(z) - zh_\sigma(z) + 1 = 0$.

Calcul de $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(G_N(z)A_N)]$:

$A_N = U^*\Lambda U$ où Λ est une matrice diagonale de coefficients $\lambda_i \neq 0$ pour $i \leq r$, $\lambda_i = 0$, $i > r$. On peut montrer, en utilisant

- La formule d'intégration par parties gaussienne
- Des estimations de variance
- $h_N(z) = h_\sigma(z) + O(\frac{1}{N})$

la formule

$$\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(G_N(z)A_N)] = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{z - \lambda_i - \sigma^2 h_\sigma(z)} + O(\frac{1}{N})$$

Posons

$$R_G^{A_N}(z) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{z - \lambda_i - \sigma^2 h_\sigma(z)} = \sum_{\theta_i \neq 0} k_i \frac{\theta_i}{z - \theta_i - \sigma^2 h_\sigma(z)}.$$

Alors,

$$\sigma^2 h_N^2(z) - z h_N(z) + 1 + \frac{1}{N} R_G^{A_N}(z) = O(\frac{1}{N^2})$$

et

$$h_N(z) - h_\sigma(z) + \frac{1}{N} L(z) = O(\frac{1}{N^2})$$

où $L(z) = \frac{1}{2\sigma^2 h_\sigma(z) - z} R_G^{A_N}(z)$.

- L transformée de Stieltjes d'une distribution ?

- Support de la distribution?

$\longleftrightarrow$ Analyticité de L (+ conditions); points singuliers.

If $|\theta_i| > \sigma$, $x \in \mathbb{R} \backslash [-2\sigma, 2\sigma]$,

$$x - \theta_i - \sigma^2 h_\sigma(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta_i + \frac{\sigma^2}{\theta_i} := \rho_{\theta_i}.$$

2) Cas non Gaussien

IPP remplacé par : (Khorunzhy, Khoruzhenko, Pastur)

Lemma 1 *Soit* ξ *une v.a. telle que* $\mathbb{E}(|\xi|^{p+2}) < \infty$. *Soit* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *telle que les* $p+1$ *derivées soient continues, bornées. Alors,*

$$\mathbb{E}(\xi\phi(\xi)) = \sum_{a=0}^{p} \frac{\kappa_{a+1}}{a!} \mathbb{E}(\phi^{(a)}(\xi)) + \epsilon$$

où κ_a *sont les cumulants de* ξ, $|\epsilon| \leq C \sup_t |\phi^{(p+1)}(t)| \mathbb{E}(|\xi|^{p+2})$.

Appliqué à $\xi = Re((X_N)_{ij}), Im((X_N)_{ij}), (X_N)_{ii}$, les cumulants impairs sont nuls (μ symétrique). On doit considérer la 3eme dérivée de $\Phi = (G_N(z))_{kl}$.

On obtient :

$$\sigma^2 h_N^2(z) - z h_N(z) + 1 + \frac{1}{N} R(z) = O(\frac{1}{N^2})$$

où $R(z) = R_G^{A_N}(z) + \kappa_4(\mu) R^0_{\Phi'''}(z)$.

$R^0_{\Phi'''}(z)$ est analytique sur $\mathbb{C} \backslash [-2\sigma, 2\sigma]$.

Fluctuations: Le cas diagonal $A_N = \mathrm{diag}(\theta_1, ..., \theta_1, \ldots)$
Rappel:
a) Les vecteurs propres normalisés u_i associés à θ_1 sont localisés : $u_i \in \mathrm{Vect}(e_j, j \leq n_1)$, n_1 et $U_{n_1 \times k_1} = (u_1, \ldots, u_{k_1})$ sont indépendants de N.

$$c_{\theta_1}\sqrt{N}(\lambda_{max}(\frac{W_N}{\sqrt{N}} + A_N) - \rho_{\theta_1})$$

converge en loi vers la v.p. maximale V_{k_1} de taille k_1:

$$V_{k_1} = U^*_{n_1 \times k_1}(W_{n_1} + H_{n_1})U_{n_1 \times k_1}.$$

Ici $n_1 = k_1$ **et** $U = I$.

$$\det(M_N - \lambda I_N) = \det \begin{pmatrix} M_{k_1} - \lambda I_{k_1} & Y \\ Y^* & M_{N-k_1} - \lambda I_{N-k_1} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\lambda_i(M_N) \longrightarrow \rho_{\theta_1}, i \leq k_1$$

$$\lambda_{max}(M_{N-k_1}) \longrightarrow \rho_{\theta_2} \vee 2\sigma < \rho_{\theta_1}$$

Sur Ω_N avec $P(\Omega_N) \longrightarrow 1$, λ n'est pas une valeur propre de M_{N-k_1}. Donc

$$(3) = \det(M_{N-k_1} - \lambda I)\det(M_{k_1} - \lambda I_{k_1} - YG_{N-k_1}(\lambda)Y^*).$$

$\longrightarrow$ λ est une valeur propre d'une matrice de taille k_1 (dépendant de λ).

$$G_{N-k_1}(\lambda) = G_{N-k_1}(\rho_{\theta_1}) - (\lambda - \rho_{\theta_1})G_{N-k_1}(\lambda)G_{N-k_1}(\rho_{\theta_1})$$

Après quelques calculs ($M_{k_1} = \frac{1}{\sqrt{N}}W_{k_1} + \theta_1 I_{k_1}$),

$\sqrt{N} C_N (\lambda - \rho_{\theta_1})$ est une valeur propre de

$$W_{k_1} + \sqrt{N}(YG(\rho_{\theta_1})Y^* - \frac{\sigma^2}{\theta_1} I_{k_1}) + o_P(1)$$

avec $C_N \xrightarrow{P} C_{\theta_1}$.

TCL pour $\sqrt{N}(YG(\rho_{\theta_1})Y^* - \frac{\sigma^2}{\theta_1} I_{k_1})$.

F. Benaych-Georges, R. Rao (2009): $M_N = X_N + A_N$ avec X_N de loi unitairement invariante.

Extension au cas de rang non fini: Le spectre de A_N est

$$\underbrace{\theta_1, ..., \theta_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\theta_J, \ldots \theta_J}_{k_J}, \beta_N(1), \ldots, \beta_N(N-r)$$

avec

$$\mu_{A_N} \longrightarrow \nu, \ \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\nu), \beta_{\mathrm{N}}(\mathrm{i})) \longrightarrow 0, \ \theta_{\mathrm{i}} \notin \mathrm{supp}(\nu).$$

Alors,

$$\mu_{M_N} \longrightarrow \mu_{sc} \boxplus \nu.$$

A_N rang fini	A_N rang non fini
$\theta_i \neq 0$, $\beta_i(N) = 0$, $\nu = \delta_0$	$\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\theta_i \notin \operatorname{supp}(\nu)$
$\rho_\theta = \theta + \sigma^2 \ \frac{1}{\theta}$	$\rho_\theta = H_\nu(\theta)$ $H_\nu(\theta) = \theta + \sigma^2 g_\nu(\theta)$
$\lvert\theta\rvert > \sigma$ $\rho_\theta \notin [-2\sigma, 2\sigma]$	$H'_\nu(\theta) > 0$ $\rho_\theta \notin \operatorname{supp}(\mu_{\mathrm{sc}} \boxplus \nu)$