

# La carte brownienne, limite continue des grandes cartes planaires aléatoires

Jean-François Le Gall

Université Paris-Sud Orsay et Institut universitaire de France

Journée en l'honneur de Jacques Neveu, 31 août 2010

# Démarche

Dans cet exposé, nous discutons les limites d'échelle de **cartes planaires**. Cela conduit à un nouvel objet probabiliste, la **carte brownienne**.

Pourquoi étudier ces limites d'échelle ?

- L'objet continu limite est intéressant pour lui-même.
- La connaissance des propriétés de l'objet continu permet de comprendre les asymptotiques des grands objets discrets.

(Exemple-clé : le mouvement brownien limite d'échelle de marches aléatoires.)

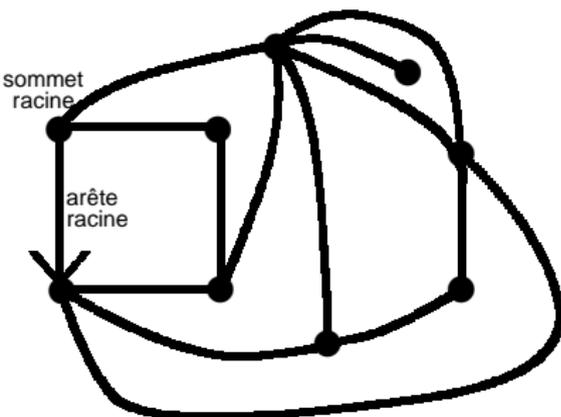
**Outils principaux :**

- Codage des cartes par des arbres étiquetés.
- Limite d'échelle des arbres aléatoires : l'arbre brownien (CRT)
  - ▶ [Neveu](#) (1985), [Aldous](#) (1991), ...

# 1. Introduction: Cartes planaires

## Définition

Une **carte planaire** est un plongement propre d'un graphe connexe fini dans la sphère de dimension deux  $\mathbb{S}^2$  (considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près).



Une quadrangulation

**Faces** = composantes connexes  
du complémentaire des arêtes

*p*-angulation:

- chaque face a *p* arêtes adjacentes

*p* = 3: triangulation

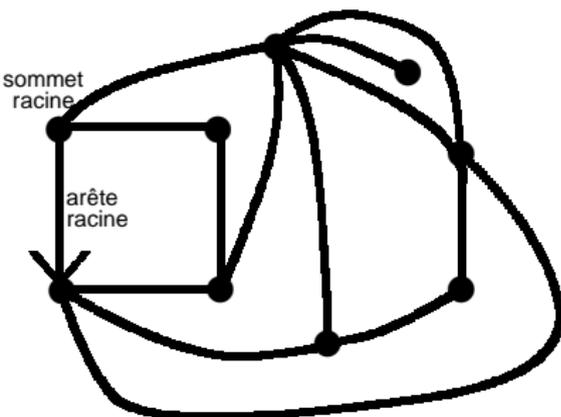
*p* = 4: quadrangulation

carte **enracinée** : arête orientée distinguée

# 1. Introduction: Cartes planaires

## Définition

Une **carte planaire** est un plongement propre d'un graphe connexe fini dans la sphère de dimension deux  $\mathbb{S}^2$  (considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près).



Une quadrangulation

**Faces** = composantes connexes  
du complémentaire des arêtes

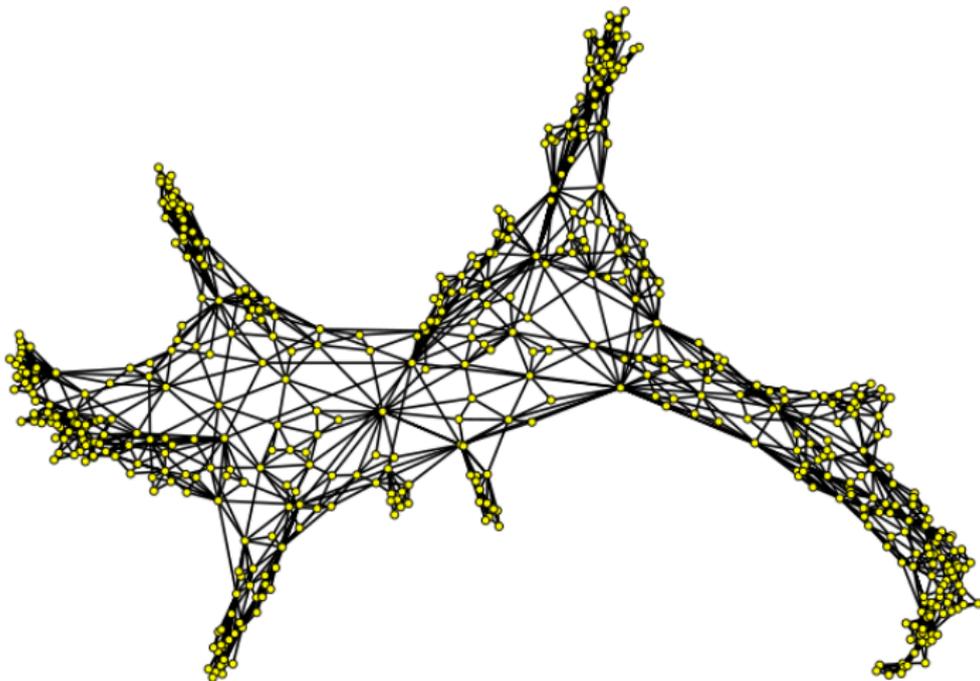
**$p$ -angulation:**

- chaque face a  $p$  arêtes adjacentes

$p = 3$ : triangulation

$p = 4$ : quadrangulation

carte **enracinée** : arête orientée distinguée



Une grande triangulation (simulation de G. Schaeffer)  
Peut-on extraire un modèle continu de cela ?

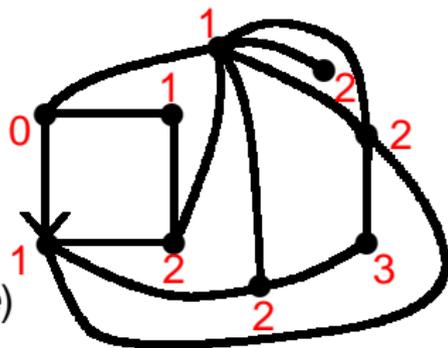
# Que signifie la limite continue ?

$M$  carte planaire

- $V(M)$  = ensemble des sommets de  $M$
- $d_{\text{gr}}$  distance de graphe sur  $V(M)$
- $(V(M), d_{\text{gr}})$  est un espace métrique (fini)

$\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations avec } n \text{ faces}\}$   
(modulo les déformations de la sphère)

$\mathbb{M}_n^p$  est un ensemble fini



## Objectif

Soit  $M_n$  choisie uniformément au hasard dans  $\mathbb{M}_n^p$ . Pour un  $a > 0$ ,

$$(V(M_n), n^{-a} d_{\text{gr}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{“espace limite continu”}$$

au sens de la distance de Gromov-Hausdorff.

## Remarques.

- Il faut changer d'échelle la distance  $d_{\text{gr}}$  pour une limite compacte.
- On pense que la limite ne dépend pas de  $p$  (universalité).

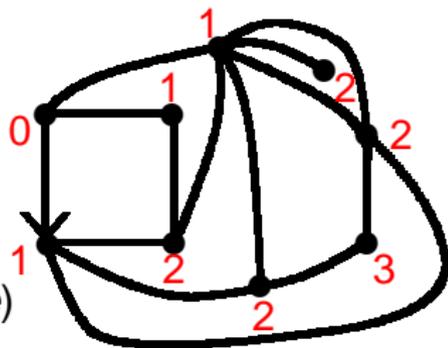
# Que signifie la limite continue ?

$M$  carte planaire

- $V(M)$  = ensemble des sommets de  $M$
- $d_{\text{gr}}$  **distance de graphe** sur  $V(M)$
- $(V(M), d_{\text{gr}})$  est un **espace métrique** (fini)

$\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations avec } n \text{ faces}\}$   
(modulo les déformations de la sphère)

$\mathbb{M}_n^p$  est un ensemble fini



## Objectif

Soit  $M_n$  choisie uniformément au hasard dans  $\mathbb{M}_n^p$ . Pour un  $a > 0$ ,

$$(V(M_n), n^{-a} d_{\text{gr}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{“espace limite continu”}$$

au sens de la distance de **Gromov-Hausdorff**.

## Remarques.

- Il faut **changer d'échelle** la distance  $d_{\text{gr}}$  pour une limite **compacte**.
- On pense que la limite ne dépend pas de  $p$  (**universalité**).

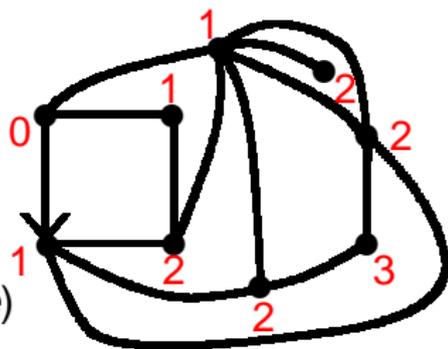
# Que signifie la limite continue ?

$M$  carte planaire

- $V(M)$  = ensemble des sommets de  $M$
- $d_{\text{gr}}$  distance de graphe sur  $V(M)$
- $(V(M), d_{\text{gr}})$  est un espace métrique (fini)

$\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations avec } n \text{ faces}\}$   
(modulo les déformations de la sphère)

$\mathbb{M}_n^p$  est un ensemble fini



## Objectif

Soit  $M_n$  choisie uniformément au hasard dans  $\mathbb{M}_n^p$ . Pour un  $a > 0$ ,

$$(V(M_n), n^{-a} d_{\text{gr}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{“espace limite continu”}$$

au sens de la distance de **Gromov-Hausdorff**.

## Remarques.

- Il faut **changer d'échelle** la distance  $d_{\text{gr}}$  pour une limite **compacte**.
- On pense que la limite ne dépend pas de  $p$  (**universalité**).

# La distance de Gromov-Hausdorff

**La distance de Hausdorff.**  $K_1, K_2$  compacts dans un espace métrique

$$d_{\text{Haus}}(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : K_1 \subset U_\varepsilon(K_2) \text{ et } K_2 \subset U_\varepsilon(K_1)\}$$

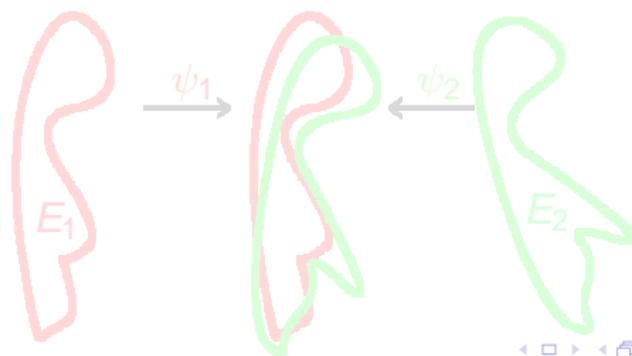
$(U_\varepsilon(K_1))$  est le voisinage de rayon  $\varepsilon$  de  $K_1$

## Définition (distance de Gromov-Hausdorff)

Si  $(E_1, d_1)$  et  $(E_2, d_2)$  sont deux espaces métriques compacts,

$$d_{\text{GH}}(E_1, E_2) = \inf\{d_{\text{Haus}}(\psi_1(E_1), \psi_2(E_2))\}$$

l'infimum porte sur tous les plongements **isométriques**  $\psi_1 : E_1 \rightarrow E$  et  $\psi_2 : E_2 \rightarrow E$  de  $E_1$  et  $E_2$  dans le même espace métrique  $E$ .



# La distance de Gromov-Hausdorff

**La distance de Hausdorff.**  $K_1, K_2$  compacts dans un espace métrique

$$d_{\text{Haus}}(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : K_1 \subset U_\varepsilon(K_2) \text{ et } K_2 \subset U_\varepsilon(K_1)\}$$

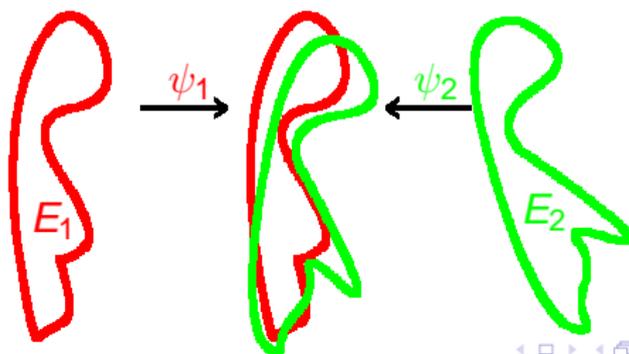
$(U_\varepsilon(K_1))$  est le voisinage de rayon  $\varepsilon$  de  $K_1$

## Définition (distance de Gromov-Hausdorff)

Si  $(E_1, d_1)$  et  $(E_2, d_2)$  sont deux espaces métriques compacts,

$$d_{\text{GH}}(E_1, E_2) = \inf\{d_{\text{Haus}}(\psi_1(E_1), \psi_2(E_2))\}$$

l'infimum porte sur tous les plongements **isométriques**  $\psi_1 : E_1 \rightarrow E$  et  $\psi_2 : E_2 \rightarrow E$  de  $E_1$  et  $E_2$  dans le même espace métrique  $E$ .



# Convergence de Gromov-Hausdorff de cartes changées d'échelles

## Fait

Si  $\mathbb{K} = \{\text{espaces métriques compacts à isométrie près}\}$ , alors

$(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$  est un espace métrique complet séparable.

→ Cela donne un sens à la **convergence** de

$$(V(M_n), n^{-a}d_{\text{gr}})$$

comme **variables aléatoires** à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

(Problème énoncé pour les triangulations par O. Schramm [ICM06])

**Choix of  $a$ .** Le paramètre  $a$  est choisi pour que  $\text{diam}(V(M_n)) \approx n^a$ .

⇒  $a = \frac{1}{4}$  [cf Chassaing-Schaeffer 2004 pour les quadrangulations]

# Convergence de Gromov-Hausdorff de cartes changées d'échelles

## Fait

Si  $\mathbb{K} = \{\text{espaces métriques compacts à isométrie près}\}$ , alors

$(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$  est un espace métrique complet séparable.

→ Cela donne un sens à la **convergence** de

$$(V(M_n), n^{-a}d_{\text{gr}})$$

comme **variables aléatoires** à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

(Problème énoncé pour les triangulations par O. Schramm [ICM06])

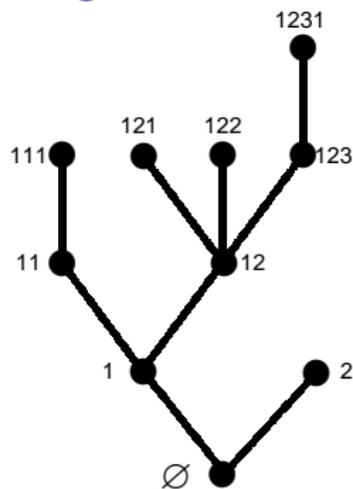
**Choix of  $a$ .** Le paramètre  $a$  est choisi pour que  $\text{diam}(V(M_n)) \approx n^a$ .

⇒  $a = \frac{1}{4}$  [cf Chassaing-Schaeffer 2004 pour les quadrangulations]

# Pourquoi étudier les cartes planaires et leurs limites d'échelle ?

- **combinatoire** [Tutte '60, théorème des 4 couleurs, etc.]
- **théorie des probabilités** : modèle pour une surface brownienne
- **motivations algébriques et géométriques** : cf Lando-Zvonkin 04 *Graphs on surfaces and their applications*
- **physique théorique**
  - ▶ énumération de cartes et **intégrales de matrices** [t Hooft 74, Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber 78, etc.], cf travaux récents de Eynard, Guionnet, etc.
  - ▶ grandes cartes planaires comme modèles de **géométrie aléatoire** (gravité quantique 2D, cf Ambjørn, Durhuus, Jonsson 95)
  - ▶ liens avec la **théorie de Liouville** et la **relation KPZ** (Polyakov, David, etc.), cf travaux récents de Duplantier et Sheffield (2008) sur la formulation de KPZ à partir d'un modèle probabiliste utilisant le champ libre gaussien.

## 2. Codage des cartes par des arbres

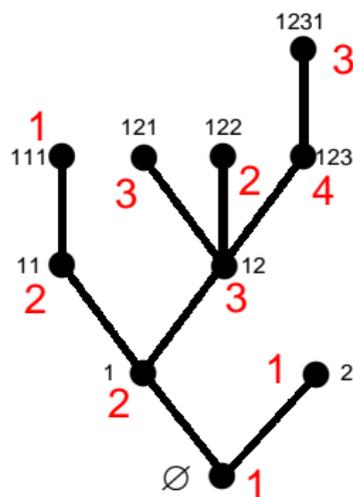


Un **arbre planaire**

$$\tau = \{\emptyset, 1, 2, 11, \dots\}$$

(arbre enraciné ordonné)

Codage utilisé par **Neveu** (1985)



Un **arbre bien étiqueté**  $(\tau, (l_v)_{v \in \tau})$

Propriétés des étiquettes :

- $l_\emptyset = 1$
- $l_v \in \{1, 2, 3, \dots\}, \forall v$
- $|l_v - l_{v'}| \leq 1$ , si  $v, v'$  voisins

# Codage dans le cas des quadrangulations

$\mathbb{T}_n = \{\text{arbres bien étiquetés à } n \text{ arêtes}\}$

$\mathbb{M}_n^4 = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}$

## Théorème (Cori-Vauquelin, Schaeffer)

*Il existe une bijection  $\Phi : \mathbb{T}_n \longrightarrow \mathbb{M}_n^4$  telle que, si  $M = \Phi(\tau, (\ell_v)_{v \in \tau})$ , alors*

$$V(M) = \tau \cup \{\partial\} \quad (\partial \text{ est le sommet racine de } M)$$

$$d_{\text{gr}}(\partial, v) = \ell_v, \quad \forall v \in \tau$$

## Propriétés importantes.

- Les sommets de  $\tau$  deviennent des sommets de  $M$
- L'**étiquette** dans l'arbre devient la **distance** depuis la racine dans la carte.

Codage de **cartes plus générales**: [Bouttier-Di Francesco-Guitter \(04\)](#)

# Codage dans le cas des quadrangulations

$\mathbb{T}_n = \{\text{arbres bien étiquetés à } n \text{ arêtes}\}$

$\mathbb{M}_n^4 = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}$

## Théorème (Cori-Vauquelin, Schaeffer)

*Il existe une bijection  $\Phi : \mathbb{T}_n \longrightarrow \mathbb{M}_n^4$  telle que, si  $M = \Phi(\tau, (\ell_v)_{v \in \tau})$ , alors*

$$V(M) = \tau \cup \{\partial\} \quad (\partial \text{ est le sommet racine de } M)$$

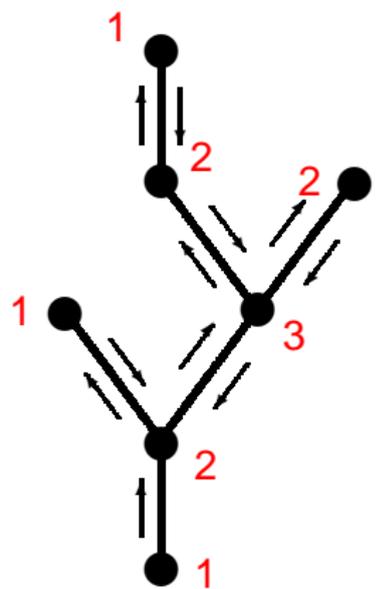
$$d_{\text{gr}}(\partial, v) = \ell_v, \quad \forall v \in \tau$$

## Propriétés importantes.

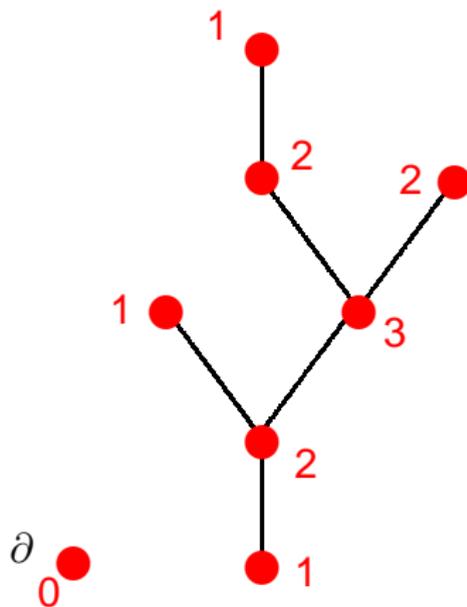
- Les sommets de  $\tau$  deviennent des sommets de  $M$
- L'**étiquette** dans l'arbre devient la **distance** depuis la racine dans la carte.

Codage de **cartes plus générales**: [Bouttier-Di Francesco-Guitter \(04\)](#)

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

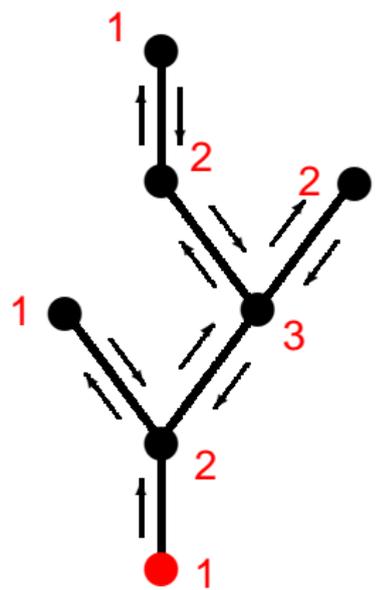


quadrangulation

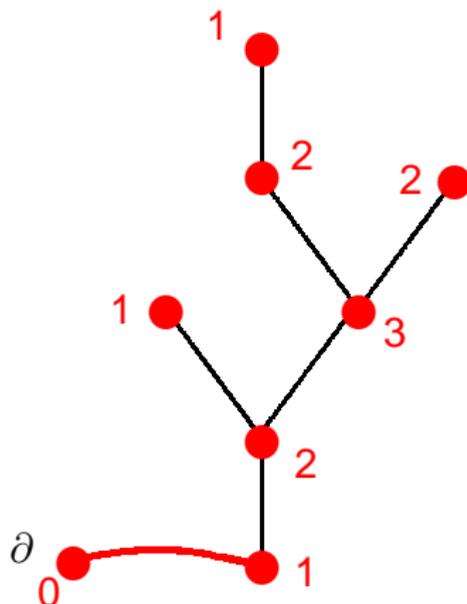
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

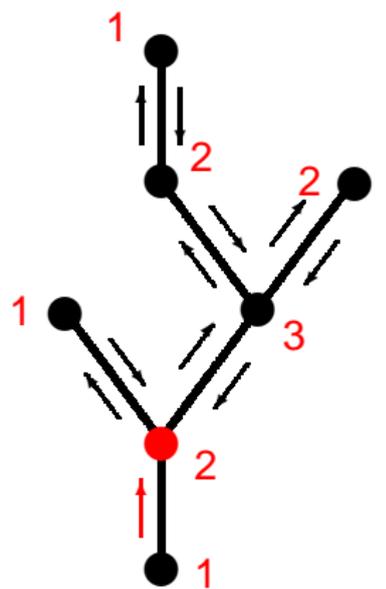


quadrangulation

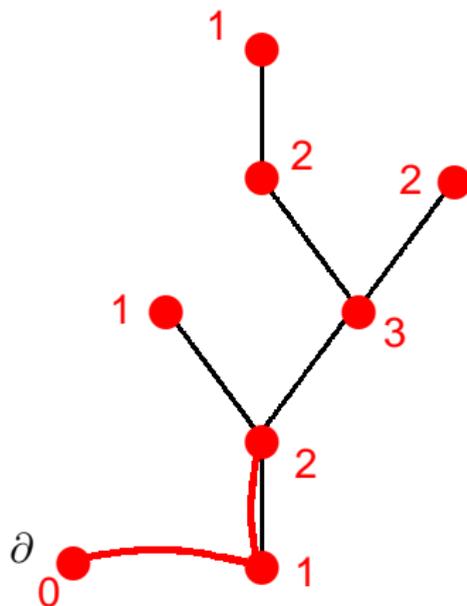
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

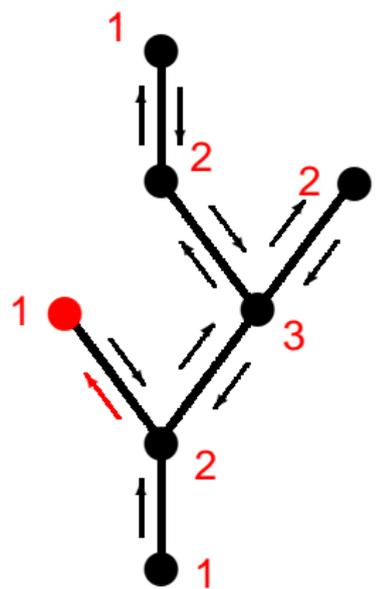


quadrangulation

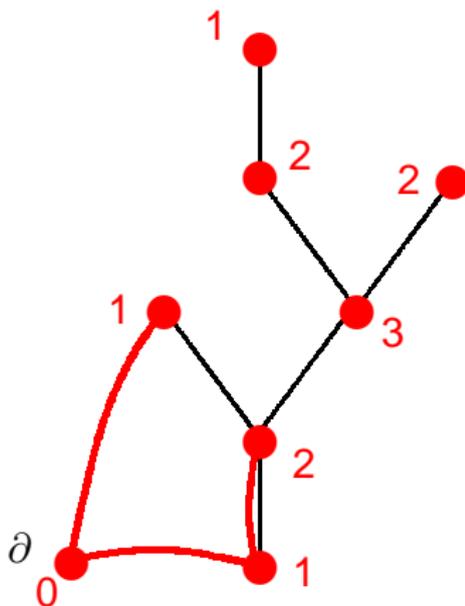
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

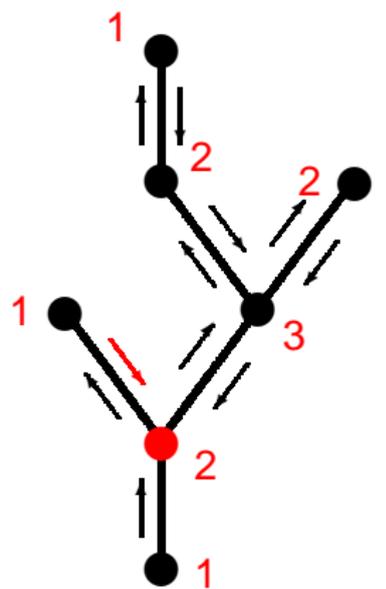


quadrangulation

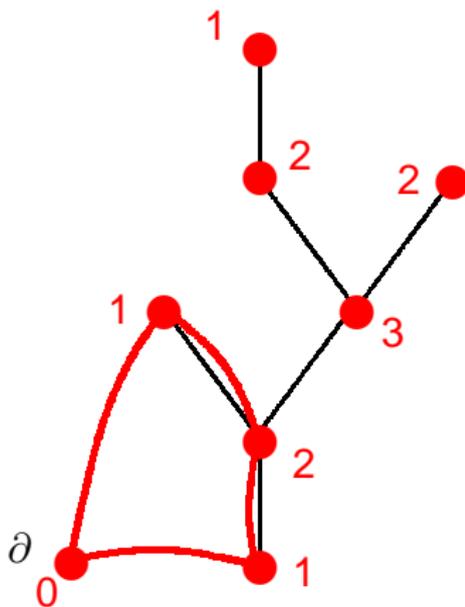
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

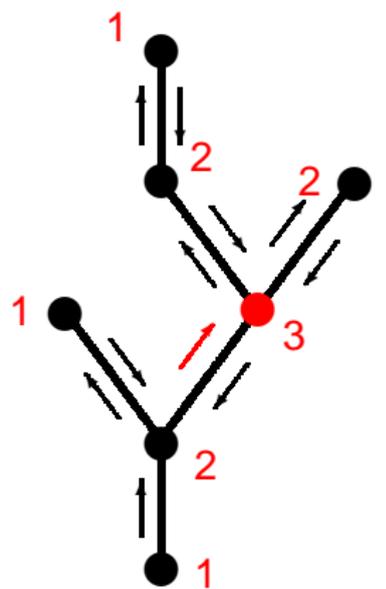


quadrangulation

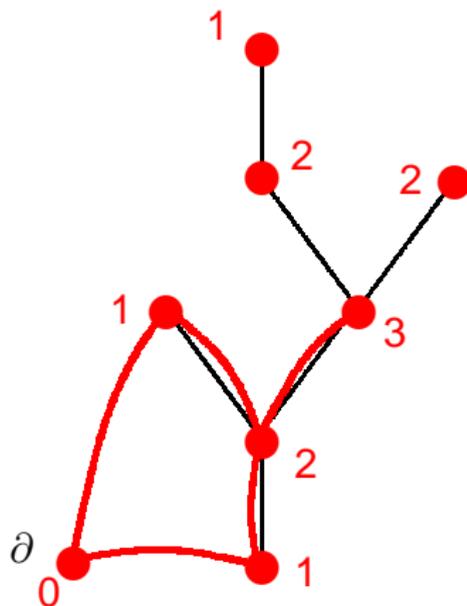
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

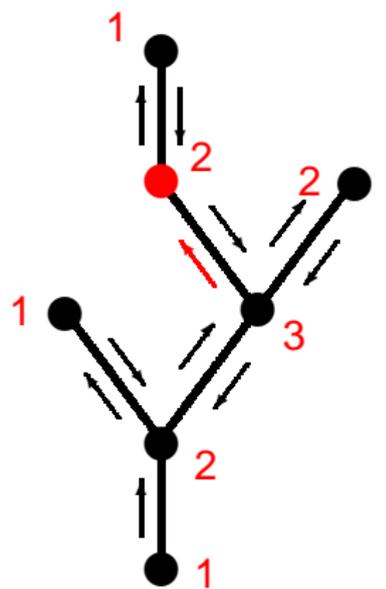


quadrangulation

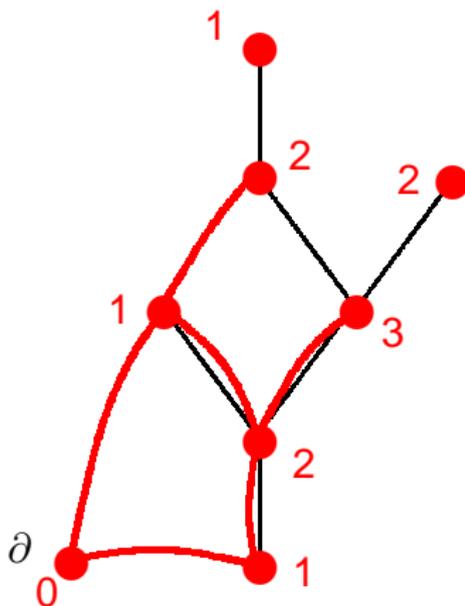
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

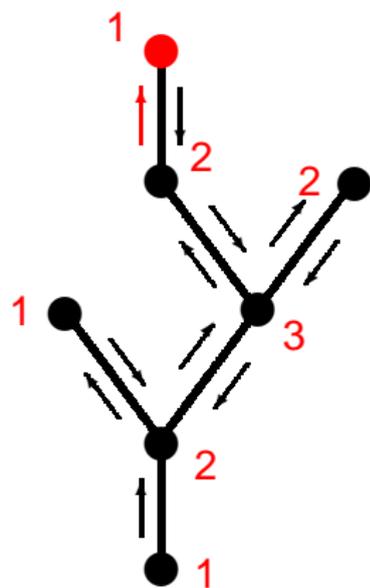


quadrangulation

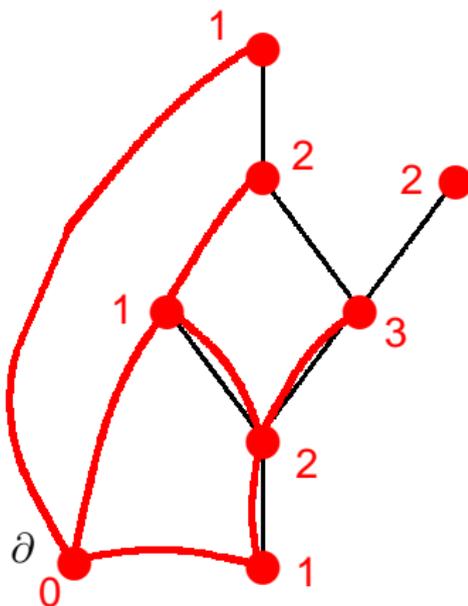
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

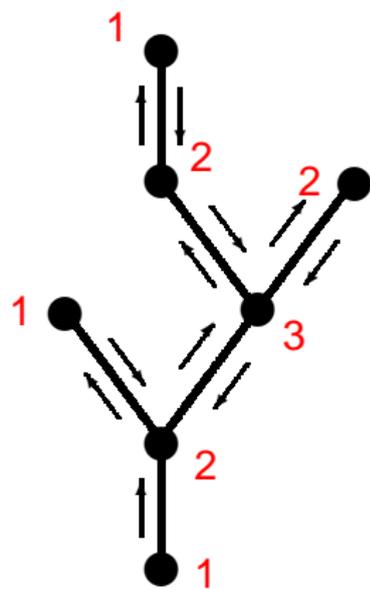


quadrangulation

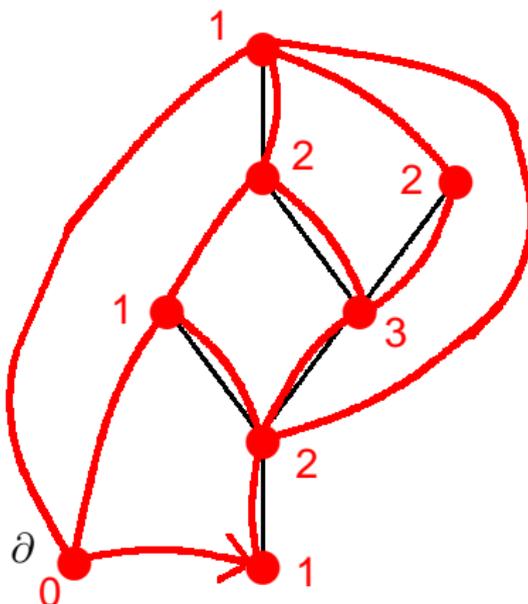
## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté



quadrangulation

## Règles.

- ajouter un sommet  $\partial$  d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque sommet au **dernier** sommet visité d'**étiquette plus petite**

# Stratégie générale

Comprendre les limites continues d'**arbres** (“**facile**”)

pour comprendre les limites continues de **cartes** (“**plus difficile**”)

**Point-clé.** Les bijections avec les arbres permettent de bien comprendre les distances au sommet racine mais **pas** les distances entre deux sommets quelconques (nécessaire pour la convergence de Gromov-Hausdorff)

# Stratégie générale

Comprendre les limites continues d'**arbres** (“**facile**”)

pour comprendre les limites continues de **cartes** (“**plus difficile**”)

**Point-clé.** Les bijections avec les arbres permettent de bien comprendre les distances au sommet racine mais **pas** les distances entre deux sommets quelconques (nécessaire pour la convergence de Gromov-Hausdorff)

### 3. Asymptotiques pour les arbres

#### Le cas des arbres planaires

$$\mathcal{T}_n^{\text{planar}} = \{\text{arbres planaires avec } n \text{ arêtes}\}$$

#### Théorème (reformulation d'Aldous 1993)

Soit  $\tau_n$  un arbre de loi uniforme sur  $\mathcal{T}_n^{\text{planar}}$ . Alors,

$$\left(\tau_n, \frac{1}{\sqrt{2n}} d_{\text{gr}}\right) \longrightarrow (\mathcal{T}_e, d_e) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

en loi, au sens de la distance de Gromov-Hausdorff.

Ici  $(\mathcal{T}_e, d_e)$  est le CRT (Continuum Random Tree)

La notation  $(\mathcal{T}_e, d_e)$  vient de ce que le CRT est

l'arbre **codé par une excursion brownienne normalisée**  $e$

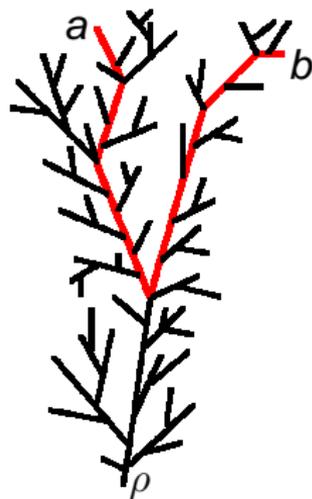
# Définition du CRT: notion d'arbre réel

## Définition

Un arbre réel est un espace métrique (compact)  $\mathcal{T}$  tel que :

- deux points  $a, b \in \mathcal{T}$  sont reliés par un unique arc
- cet arc est isométrique à un segment de droite

L'arbre est enraciné si on se donne un point distingué  $\rho$ , la racine.



**Remarque.** un arbre réel peut avoir

- une infinité de points de branchement
- une infinité non dénombrable de feuilles

**Fait.** Le codage des arbres discrets par les fonctions de contour (chemins de Dyck) s'étend aux arbres réels.

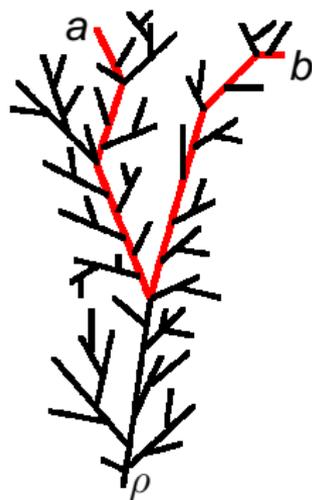
# Définition du CRT: notion d'arbre réel

## Définition

Un arbre réel est un espace métrique (compact)  $\mathcal{T}$  tel que :

- deux points  $a, b \in \mathcal{T}$  sont reliés par un unique arc
- cet arc est isométrique à un segment de droite

L'arbre est enraciné si on se donne un point distingué  $\rho$ , la racine.



**Remarque.** un arbre réel peut avoir

- une infinité de points de branchement
- une infinité non dénombrable de feuilles

**Fait.** Le codage des arbres discrets par les fonctions de contour (chemins de Dyck) s'étend aux arbres réels.

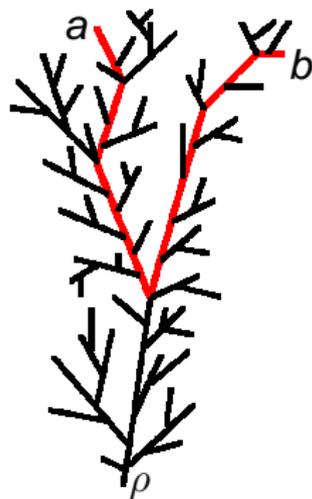
# Définition du CRT: notion d'arbre réel

## Définition

Un arbre réel est un espace métrique (compact)  $\mathcal{T}$  tel que :

- deux points  $a, b \in \mathcal{T}$  sont reliés par un unique arc
- cet arc est isométrique à un segment de droite

L'arbre est enraciné si on se donne un point distingué  $\rho$ , la racine.



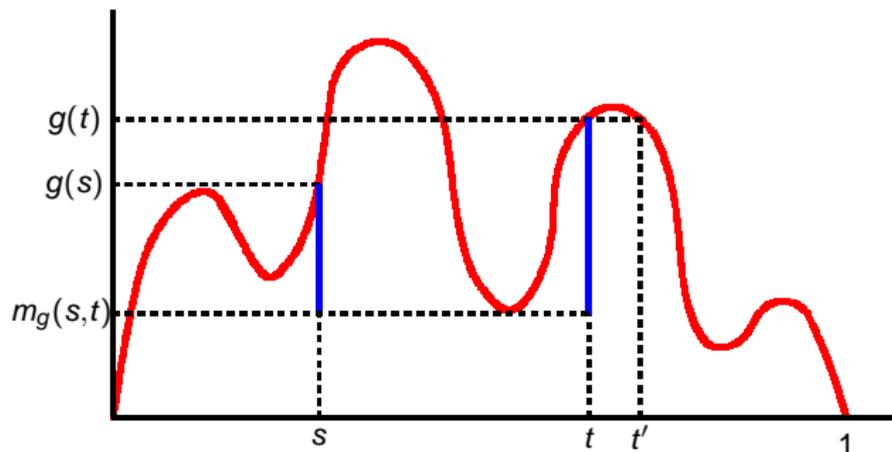
**Remarque.** un arbre réel peut avoir

- une infinité de points de branchement
- une infinité non dénombrable de feuilles

**Fait.** Le codage des arbres discrets par les fonctions de contour (chemins de Dyck) s'étend aux arbres réels.

# L'arbre réel codé par une fonction $g$

$g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$   
continue,  
 $g(0) = g(1) = 0$



$$m_g(s, t) = m_g(t, s) = \min_{s \leq r \leq t} g(r)$$

$$d_g(s, t) = g(s) + g(t) - 2m_g(s, t)$$

$$t \sim t' \text{ ssi } d_g(t, t') = 0$$

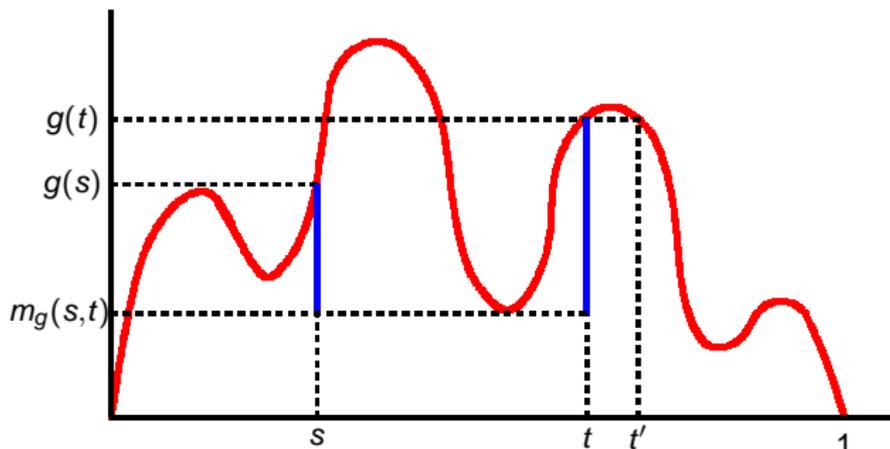
## Proposition (Duquesne-LG)

$\mathcal{T}_g := [0, 1] / \sim$  muni de la distance  $d_g$  est un arbre réel, dit codé par  $g$ .  
Il est enraciné en  $\rho = 0$ .

**Remarque.**  $\mathcal{T}_g$  hérite un “ordre lexicographique” du codage.

# L'arbre réel codé par une fonction $g$

$g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$   
continue,  
 $g(0) = g(1) = 0$



$$m_g(s, t) = m_g(t, s) = \min_{s \leq r \leq t} g(r)$$

$$d_g(s, t) = g(s) + g(t) - 2m_g(s, t)$$

$$t \sim t' \text{ ssi } d_g(t, t') = 0$$

## Proposition (Duquesne-LG)

$\mathcal{T}_g := [0, 1] / \sim$  muni de la distance  $d_g$  est un arbre réel, dit codé par  $g$ .  
Il est enraciné en  $\rho = 0$ .

**Remarque.**  $\mathcal{T}_g$  hérite un “**ordre lexicographique**” du codage.

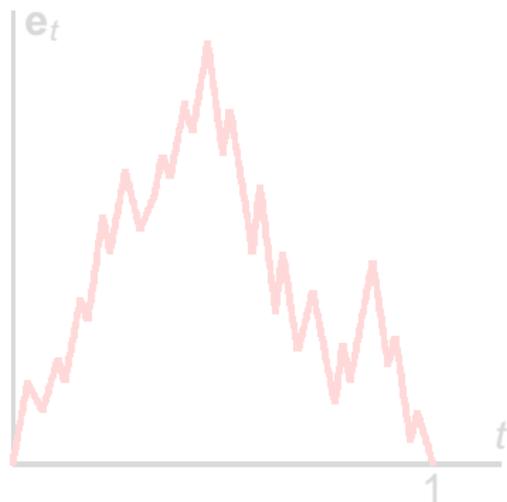
# Retour au théorème d'Aldous et au CRT

Théorème d'Aldous :  $\tau_n$  de loi uniforme sur  $T_n^{\text{planar}}$

$$\left(\tau_n, \frac{1}{\sqrt{2n}} d_{\text{gr}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} (\mathcal{T}_e, d_e)$$

au sens de Gromov-Hausdorff.

La limite  $(\mathcal{T}_e, d_e)$  est l'arbre réel (aléatoire) codé par une excursion brownienne normalisée  $e$ .



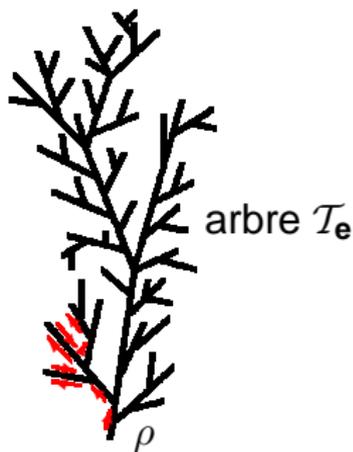
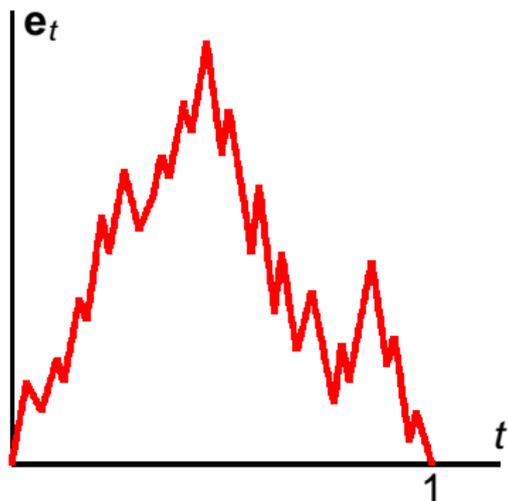
# Retour au théorème d'Aldous et au CRT

Théorème d'Aldous :  $\tau_n$  de loi uniforme sur  $T_n^{\text{planar}}$

$$\left(\tau_n, \frac{1}{\sqrt{2n}} d_{\text{gr}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} (\mathcal{T}_e, d_e)$$

au sens de Gromov-Hausdorff.

La limite  $(\mathcal{T}_e, d_e)$  est l'arbre réel (aléatoire) codé par une excursion brownienne normalisée  $e$ .



# Étiquettes sur un arbre réel

Attacher des étiquettes (aléatoires) aux sommets d'un arbre réel  $(\mathcal{T}, d)$

$(Z_a)_{a \in \mathcal{T}}$ : mouvement brownien indexé par  $(\mathcal{T}, d)$

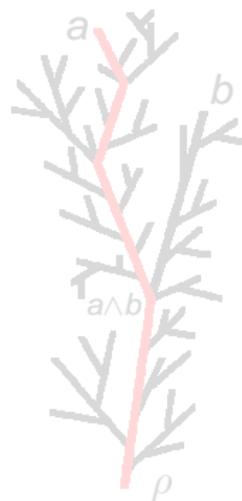
= processus gaussien (centré)  $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}}$  tel que :

- $Z_\rho = 0$  ( $\rho$  racine de  $\mathcal{T}$ )
- $E[(Z_a - Z_b)^2] = d(a, b), \quad a, b \in \mathcal{T}$

Les étiquettes évoluent de manière brownienne le long des branches :

- L'étiquette  $Z_a$  est la valeur au temps  $d(\rho, a)$  d'un mouvement brownien standard
- Même propriété pour  $Z_b$ , mais on utilise
  - ▶ le même MB entre 0 et  $d(\rho, a \wedge b)$
  - ▶ un MB indépendant entre  $d(\rho, a \wedge b)$  et  $d(\rho, b)$

**Problème.** La contrainte de positivité n'est pas satisfaite !



# Étiquettes sur un arbre réel

Attacher des étiquettes (aléatoires) aux sommets d'un arbre réel  $(\mathcal{T}, d)$

$(Z_a)_{a \in \mathcal{T}}$ : mouvement brownien indexé par  $(\mathcal{T}, d)$

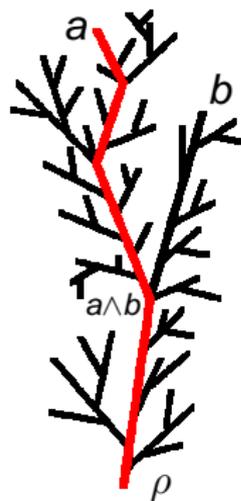
= processus gaussien (centré)  $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}}$  tel que :

- $Z_\rho = 0$  ( $\rho$  racine de  $\mathcal{T}$ )
- $E[(Z_a - Z_b)^2] = d(a, b), \quad a, b \in \mathcal{T}$

Les étiquettes évoluent de manière brownienne le long des branches :

- L'étiquette  $Z_a$  est la valeur au temps  $d(\rho, a)$  d'un mouvement brownien standard
- Même propriété pour  $Z_b$ , mais on utilise
  - ▶ le même MB entre 0 et  $d(\rho, a \wedge b)$
  - ▶ un MB indépendant entre  $d(\rho, a \wedge b)$  et  $d(\rho, b)$

**Problème.** La contrainte de positivité n'est pas satisfaite !

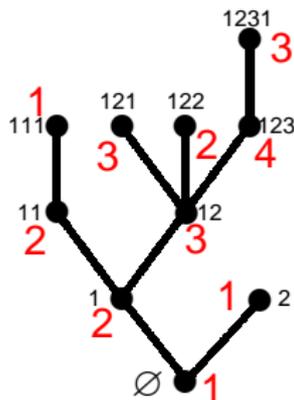


# La limite d'échelle des arbres bien étiquetés

Rappel:  $\mathbb{T}_n = \{\text{arbres bien étiquetés, } n \text{ arêtes}\}$   
 $(\theta_n, (\ell_v^n)_{v \in \theta_n})$  de loi uniforme  $\mathbb{T}_n$

## Changement d'échelle:

- Les distances sur  $\theta_n$  sont multipliées par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  (théorème d'Aldous)
- Les étiquettes  $\ell_v^n$  sont multipliées par  $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$  ("théorème central limite")



## Fait

La limite d'échelle de  $(\theta_n, (\ell_v^n)_{v \in \theta_n})$  est  $(\mathcal{T}_e, (\bar{Z}_a)_{a \in \mathcal{T}_e})$ , où

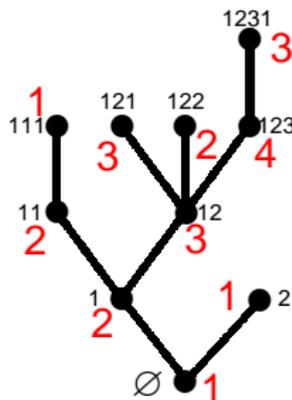
- $\mathcal{T}_e$  est le CRT
- $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}_e}$  est le mouvement brownien indexé par le CRT
- $\bar{Z}_a = Z_a - Z_*$ , où  $Z_* = \min\{Z_a, a \in \mathcal{T}_e\}$
- $\mathcal{T}_e$  est réenraciné au sommet minimisant  $Z$

# La limite d'échelle des arbres bien étiquetés

Rappel:  $\mathbb{T}_n = \{\text{arbres bien étiquetés, } n \text{ arêtes}\}$   
 $(\theta_n, (\ell_v^n)_{v \in \theta_n})$  de loi uniforme  $\mathbb{T}_n$

## Changement d'échelle:

- Les distances sur  $\theta_n$  sont multipliées par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  (théorème d'Aldous)
- Les étiquettes  $\ell_v^n$  sont multipliées par  $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$  ("théorème central limite")



## Fait

La limite d'échelle de  $(\theta_n, (\ell_v^n)_{v \in \theta_n})$  est  $(\mathcal{T}_e, (\bar{Z}_a)_{a \in \mathcal{T}_e})$ , où

- $\mathcal{T}_e$  est le CRT
- $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}_e}$  est le mouvement brownien indexé par le CRT
- $\bar{Z}_a = Z_a - Z_*$ , où  $Z_* = \min\{Z_a, a \in \mathcal{T}_e\}$
- $\mathcal{T}_e$  est réenraciné au sommet minimisant  $Z$

# Application au rayon d'une carte planaire

Rappel :

- Bijection de Schaeffer : quadrangulations  $\leftrightarrow$  arbres bien étiquetés
- Les étiquettes sur l'arbre correspondent aux distances de la racine dans la carte

## Théorème (Chassaing-Schaeffer 2004)

Soit  $R_n$  la distance maximale de la racine dans une quadrangulation à  $n$  faces choisie au hasard. Alors

$$n^{-1/4} R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(\frac{8}{9}\right)^{1/4} (\max Z - \min Z)$$

où  $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}_e}$  est le mouvement brownien indexé par le CRT.

Propriétés de la loi limite : [Delmas \(2003\)](#)

Extensions à des cartes bien plus générales (triangulations, etc.) :

- [Marckert-Miermont \(2006\)](#), [Miermont](#), [Miermont-Weill \(2007\)](#), ...

$\Rightarrow$  Suggère fortement l'**universalité** de la limite continue des cartes.

# Application au rayon d'une carte planaire

Rappel :

- Bijection de Schaeffer : quadrangulations  $\leftrightarrow$  arbres bien étiquetés
- Les étiquettes sur l'arbre correspondent aux distances de la racine dans la carte

## Théorème (Chassaing-Schaeffer 2004)

Soit  $R_n$  la distance maximale de la racine dans une quadrangulation à  $n$  faces choisie au hasard. Alors

$$n^{-1/4} R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(\frac{8}{9}\right)^{1/4} (\max Z - \min Z)$$

où  $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}_e}$  est le mouvement brownien indexé par le CRT.

Propriétés de la loi limite : [Delmas](#) (2003)

Extensions à des cartes bien plus générales (triangulations, etc.) :

- [Marckert-Miermont](#) (2006), [Miermont](#), [Miermont-Weill](#) (2007), ...

$\Rightarrow$  Suggère fortement l'**universalité** de la limite continue des cartes.

## 4. La limite d'échelle des cartes planaires

$\mathbb{M}_n^{2p} = \{2p - \text{angulations enracinées à } n \text{ faces}\}$  (cas bipartie)

$M_n$  de loi uniforme sur  $\mathbb{M}_n^{2p}$ ,  $V(M_n)$  ensemble des sommets de  $M_n$ ,  
 $d_{\text{gr}}$  distance de graphe

### Théorème (La limite d'échelle des $2p$ -angulations)

Au moins le long d'une suite  $n_k \uparrow \infty$ , on a

$$(V(M_n), c_p \frac{1}{n^{1/4}} d_{\text{gr}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} (\mathbf{m}_\infty, D)$$

au sens de Gromov-Hausdorff. De plus,  $\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \approx$  où

- $\mathcal{T}_e$  est le **CRT** (réenraciné au sommet minimisant  $Z$ )
- $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}_e}$  est le **mouvement brownien indexé par  $\mathcal{T}_e$** , et  $\bar{Z}_a = Z_a - \min Z$
- $\approx$  relation d'équivalence sur  $\mathcal{T}_e$ :  $a \approx b \Leftrightarrow \bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \min_{c \in [a, b]} \bar{Z}_c$   
( $[a, b]$  intervalle lexicographique entre  $a$  et  $b$  dans l'arbre)
- $D$  distance sur  $\mathbf{m}_\infty$  telle que  $D(\rho, a) = \bar{Z}_a$

# Interprétation de la relation d'équivalence $\approx$

Rappelons la bijection de Schaeffer :

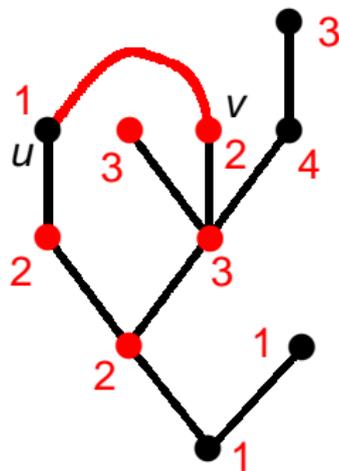
$\exists$  arête entre  $u$  et  $v$  si

- $l_u = l_v - 1$
- $l_w \geq l_v, \forall w \in ]u, v]$

Explique pourquoi dans la limite continue

$$a \approx b \Rightarrow \bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \min_{c \in [a, b]} \bar{Z}_c$$

$\Rightarrow a$  and  $b$  sont identifiés



**Point clé:** Aucune autre paire de sommets n'est identifiée.

**Remarque:** Les classes d'équivalence pour  $\approx$  contiennent 1, 2 ou 3 points.

# Conséquence et problèmes ouverts

## Corollaire

*Le type topologique de toute limite séquentielle de Gromov-Hausdorff de la suite  $(V(M_n), n^{-1/4} d_{\text{gr}})$  est déterminé :*

$$\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \approx \quad \text{avec la topologie quotient.}$$

## Problèmes ouverts :

- Identifier la distance  $D$  on  $\mathbf{m}_\infty$   
(impliquerait qu'il n'y a pas besoin de prendre une sous-suite)
  - ▶ Bouttier-Guitter (2008): calcul de la loi de la fonction à trois points pour les quadrangulations.
- Montrer que  $D$  ne dépend pas de  $p$   
(propriété d'universalité, même limite pour les triangulations, etc.)

NEANMOINS ON SAIT DIRE BEAUCOUP SUR LA LIMITE !

L'espace limite  $(\mathbf{m}_\infty, D)$  est appelé la **carte brownienne** [Marckert, Mokkadem 2006, avec une approche différente]

# Conséquence et problèmes ouverts

## Corollaire

*Le type topologique de toute limite séquentielle de Gromov-Hausdorff de la suite  $(V(M_n), n^{-1/4} d_{\text{gr}})$  est déterminé :*

$$\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \approx \quad \text{avec la topologie quotient.}$$

## Problèmes ouverts :

- **Identifier la distance  $D$  on  $\mathbf{m}_\infty$**   
(impliquerait qu'il n'y a pas besoin de prendre une sous-suite)
  - ▶ Bouttier-Guitter (2008): calcul de la loi de la fonction à trois points pour les quadrangulations.
- **Montrer que  $D$  ne dépend pas de  $p$**   
(propriété d'universalité, même limite pour les triangulations, etc.)

NEANMOINS ON SAIT DIRE BEAUCOUP SUR LA LIMITE !

L'espace limite  $(\mathbf{m}_\infty, D)$  est appelé la **carte brownienne** [Marckert, Mokkadem 2006, avec une approche différente]

# Conséquence et problèmes ouverts

## Corollaire

Le type topologique de toute limite séquentielle de Gromov-Hausdorff de la suite  $(V(M_n), n^{-1/4} d_{\text{gr}})$  est déterminé :

$$\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \approx \quad \text{avec la topologie quotient.}$$

## Problèmes ouverts :

- Identifier la distance  $D$  on  $\mathbf{m}_\infty$   
(impliquerait qu'il n'y a pas besoin de prendre une sous-suite)
  - ▶ Bouttier-Guitter (2008): calcul de la loi de la fonction à trois points pour les quadrangulations.
- Montrer que  $D$  ne dépend pas de  $p$   
(propriété d'universalité, même limite pour les triangulations, etc.)

**NEANMOINS ON SAIT DIRE BEAUCOUP SUR LA LIMITE !**

L'espace limite  $(\mathbf{m}_\infty, D)$  est appelé la **carte brownienne** [Marckert, Mokkadem 2006, avec une approche différente]

# Deux théorèmes sur la carte brownienne

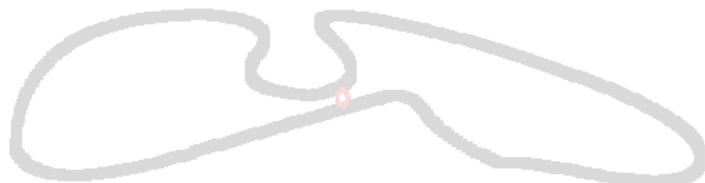
## Théorème (dimension de Hausdorff )

$$\dim(\mathbf{m}_\infty, D) = 4 \quad \text{p.s.}$$

## Théorème (type topologique, LG-Paulin 2007)

*Presque sûrement,  $(\mathbf{m}_\infty, D)$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$ .*

**Conséquence:** pour  $n$  grand,  
pas de cycle séparant de  
longueur  $o(n^{1/4})$  dans  $M_n$ ,  
tel que les deux cotés aient  
un diamètre  $\geq \varepsilon n^{1/4}$



Preuve alternative du théorème d'homéomorphisme : [Miermont \(2008\)](#)

# Deux théorèmes sur la carte brownienne

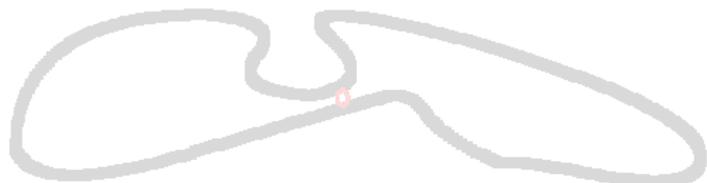
## Théorème (dimension de Hausdorff )

$$\dim(\mathbf{m}_\infty, D) = 4 \quad p.s.$$

## Théorème (type topologique, LG-Paulin 2007)

*Presque sûrement,  $(\mathbf{m}_\infty, D)$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$ .*

**Conséquence:** pour  $n$  grand,  
pas de cycle séparant de  
longueur  $o(n^{1/4})$  dans  $M_n$ ,  
tel que les deux cotés aient  
un diamètre  $\geq \varepsilon n^{1/4}$



Preuve alternative du théorème d'homéomorphisme : [Miermont \(2008\)](#)

# Deux théorèmes sur la carte brownienne

## Théorème (dimension de Hausdorff )

$$\dim(\mathbf{m}_\infty, D) = 4 \quad p.s.$$

## Théorème (type topologique, LG-Paulin 2007)

*Presque sûrement,  $(\mathbf{m}_\infty, D)$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$ .*

**Conséquence:** pour  $n$  grand,  
pas de cycle séparant de  
longueur  $o(n^{1/4})$  dans  $M_n$ ,  
tel que les deux cotés aient  
un diamètre  $\geq \varepsilon n^{1/4}$



Preuve alternative du théorème d'homéomorphisme : [Miermont \(2008\)](#)

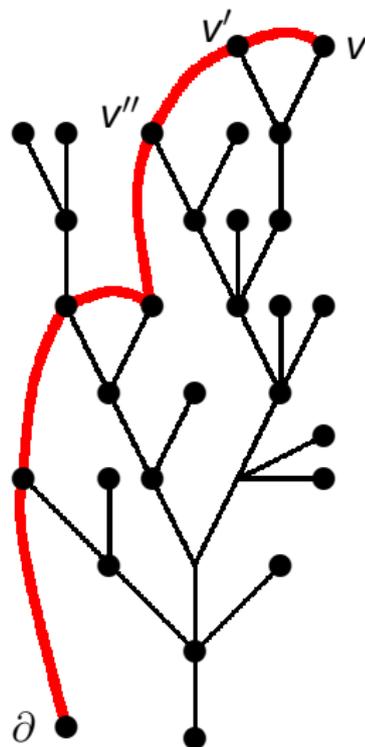
## 5. Géodésiques dans la carte brownienne

### Géodésiques dans les quadrangulations

On utilise la bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés.

Pour construire une géodésique de  $v$  à  $\partial$ :

- On cherche le dernier sommet visité (avant  $v$ ) d'étiquette  $\ell_v - 1$ . On l'appelle  $v'$ .
- On fait de même à partir de  $v'$  pour obtenir un sommet  $v''$ .
- Et ainsi de suite.
- On atteint finalement la racine  $\partial$ .



# Géodésiques simples dans la carte brownienne

Carte brownienne :  $\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \approx$ , racine  $\rho$

$\prec$  ordre lexicographique sur  $\mathcal{T}_e$

Rappel :  $D(\rho, a) = \bar{Z}_a$  (étiquettes sur  $\mathcal{T}_e$ )

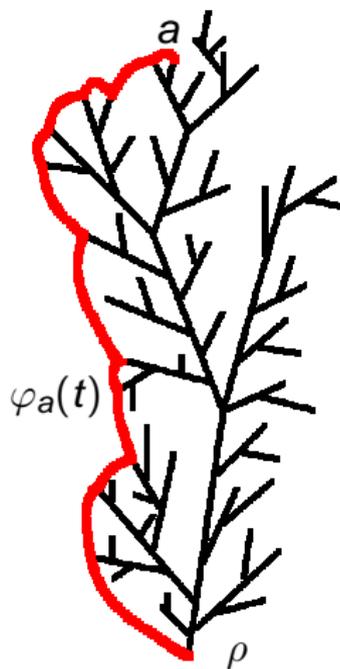
On fixe  $a \in \mathcal{T}_e$  et pour  $t \in [0, \bar{Z}_a]$ , on pose

$$\varphi_a(t) = \sup\{b \prec a : \bar{Z}_b = t\}$$

(même formule que dans le cas discret !)

Alors  $(\varphi_a(t))_{0 \leq t \leq \bar{Z}_a}$  est une géodésique de  $\rho$  à  $a$

(appelée une **géodésique simple**)



Fait

*Les géodésiques simples visitent seulement les feuilles  $\mathcal{T}_e$  (sauf peut-être en leur point de départ)*

# Géodésiques simples dans la carte brownienne

Carte brownienne :  $\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \approx$ , racine  $\rho$

$\prec$  ordre lexicographique sur  $\mathcal{T}_e$

Rappel :  $D(\rho, a) = \bar{Z}_a$  (étiquettes sur  $\mathcal{T}_e$ )

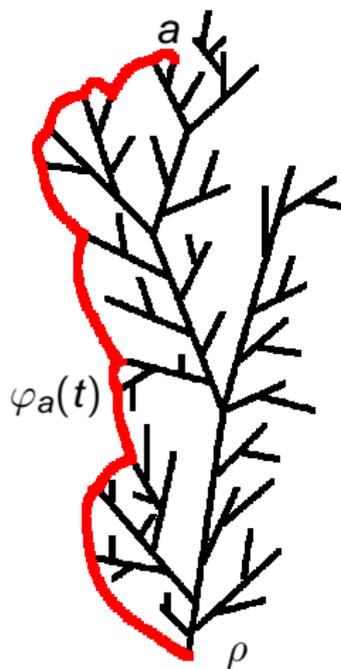
On fixe  $a \in \mathcal{T}_e$  et pour  $t \in [0, \bar{Z}_a]$ , on pose

$$\varphi_a(t) = \sup\{b \prec a : \bar{Z}_b = t\}$$

(même formule que dans le cas discret !)

Alors  $(\varphi_a(t))_{0 \leq t \leq \bar{Z}_a}$  est une géodésique de  $\rho$  à  $a$

(appelée une **géodésique simple**)



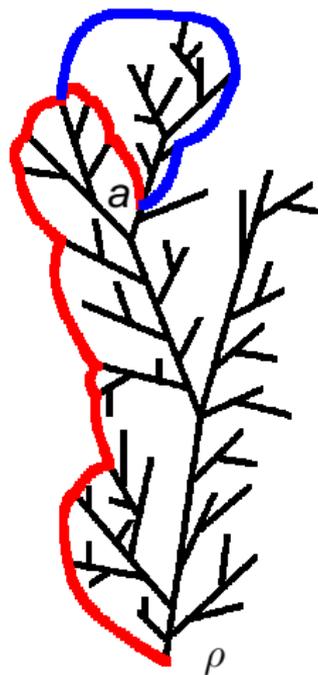
## Fait

*Les géodésiques simples visitent seulement les feuilles  $\mathcal{T}_e$  (sauf peut-être en leur point de départ)*

# Combien de géodésiques simples partant d'un point ?

- Si  $a$  est une feuille de  $\mathcal{T}_e$ , il y a une unique géodésique simple de  $\rho$  vers  $a$
- Sinon, il y a
  - ▶ 2 géodésiques simples distinctes si  $a$  est un point simple
  - ▶ 3 géodésiques simples distinctes si  $a$  est un point de branchement

(3 est la multiplicité maximale dans  $\mathcal{T}_e$ )



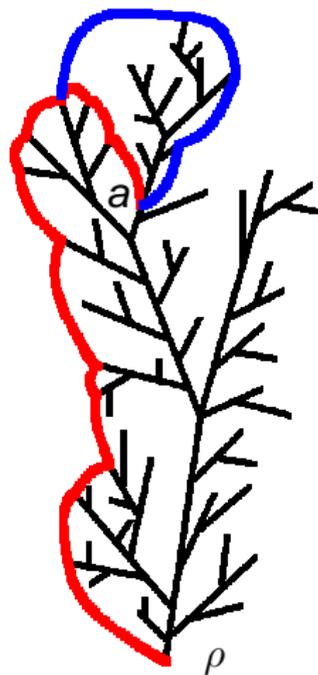
Proposition (résultat clé)

*Toutes les géodésiques vers la racine sont des géodésiques simples.*

# Combien de géodésiques simples partant d'un point ?

- Si  $a$  est une feuille de  $\mathcal{T}_e$ , il y a une unique géodésique simple de  $\rho$  vers  $a$
- Sinon, il y a
  - ▶ 2 géodésiques simples distinctes si  $a$  est un point simple
  - ▶ 3 géodésiques simples distinctes si  $a$  est un point de branchement

(3 est la multiplicité maximale dans  $\mathcal{T}_e$ )



## Proposition (résultat clé)

*Toutes les géodésiques vers la racine sont des géodésiques simples.*

# Le résultat principal sur les géodésiques

On définit le squelette de  $\mathcal{T}_e$  par  $\text{Sk}(\mathcal{T}_e) = \mathcal{T}_e \setminus \{\text{feuilles de } \mathcal{T}_e\}$ . On pose

$$\text{Skel} = \pi(\text{Sk}(\mathcal{T}_e)) \quad (\pi : \mathcal{T}_e \rightarrow \mathcal{T}_e / \approx = \mathbf{m}_\infty \text{ projection canonique})$$

Alors

- la restriction de  $\pi$  à  $\text{Sk}(\mathcal{T}_e)$  est un homéomorphisme sur  $\text{Skel}$
- $\dim(\text{Skel}) = 2$  (rappel  $\dim(\mathbf{m}_\infty) = 4$ )

## Théorème (Géodésiques vers la racine)

Soit  $x \in \mathbf{m}_\infty$ . Alors

- si  $x \notin \text{Skel}$ , il existe une unique géodésique entre  $\rho$  et  $x$
- si  $x \in \text{Skel}$ , le nombre de géodésiques distinctes entre  $\rho$  et  $x$  est la multiplicité  $m(x)$  de  $x$  dans  $\text{Skel}$  (remarque :  $m(x) \leq 3$ ).

## Remarques

- $\text{Skel}$  est le cut-locus de  $\mathbf{m}_\infty$  relatif à  $\rho$ : cf géométrie riemannienne [Poincaré, Myers, ...], où le cut-locus est un arbre.
- mêmes résultats si  $\rho$  est remplacé par un point choisi "au hasard" dans  $\mathbf{m}_\infty$ .

# Le résultat principal sur les géodésiques

On définit le squelette de  $\mathcal{T}_e$  par  $\text{Sk}(\mathcal{T}_e) = \mathcal{T}_e \setminus \{\text{feuilles de } \mathcal{T}_e\}$ . On pose

$$\text{Skel} = \pi(\text{Sk}(\mathcal{T}_e)) \quad (\pi : \mathcal{T}_e \rightarrow \mathcal{T}_e / \approx = \mathbf{m}_\infty \text{ projection canonique})$$

Alors

- la restriction de  $\pi$  à  $\text{Sk}(\mathcal{T}_e)$  est un homéomorphisme sur  $\text{Skel}$
- $\dim(\text{Skel}) = 2$  (rappel  $\dim(\mathbf{m}_\infty) = 4$ )

## Théorème (Géodésiques vers la racine)

Soit  $x \in \mathbf{m}_\infty$ . Alors

- si  $x \notin \text{Skel}$ , il existe une unique géodésique entre  $\rho$  et  $x$
- si  $x \in \text{Skel}$ , le nombre de géodésiques distinctes entre  $\rho$  et  $x$  est la multiplicité  $m(x)$  de  $x$  dans  $\text{Skel}$  (remarque :  $m(x) \leq 3$ ).

## Remarques

- $\text{Skel}$  est le cut-locus de  $\mathbf{m}_\infty$  relatif à  $\rho$ : cf géométrie riemannienne [Poincaré, Myers, ...], où le cut-locus est un arbre.
- mêmes résultats si  $\rho$  est remplacé par un point choisi "au hasard" dans  $\mathbf{m}_\infty$ .

# Le résultat principal sur les géodésiques

On définit le squelette de  $\mathcal{T}_e$  par  $\text{Sk}(\mathcal{T}_e) = \mathcal{T}_e \setminus \{\text{feuilles de } \mathcal{T}_e\}$ . On pose

$$\text{Skel} = \pi(\text{Sk}(\mathcal{T}_e)) \quad (\pi : \mathcal{T}_e \rightarrow \mathcal{T}_e / \approx = \mathbf{m}_\infty \text{ projection canonique})$$

Alors

- la restriction de  $\pi$  à  $\text{Sk}(\mathcal{T}_e)$  est un homéomorphisme sur  $\text{Skel}$
- $\dim(\text{Skel}) = 2$  (rappel  $\dim(\mathbf{m}_\infty) = 4$ )

## Théorème (Géodésiques vers la racine)

Soit  $x \in \mathbf{m}_\infty$ . Alors

- si  $x \notin \text{Skel}$ , il existe une unique géodésique entre  $\rho$  et  $x$
- si  $x \in \text{Skel}$ , le nombre de géodésiques distinctes entre  $\rho$  et  $x$  est la multiplicité  $m(x)$  de  $x$  dans  $\text{Skel}$  (remarque :  $m(x) \leq 3$ ).

## Remarques

- $\text{Skel}$  est le cut-locus de  $\mathbf{m}_\infty$  relatif à  $\rho$ : cf géométrie riemannienne [Poincaré, Myers, ...], où le cut-locus est un arbre.
- mêmes résultats si  $\rho$  est remplacé par un point choisi “au hasard” dans  $\mathbf{m}_\infty$ .

# Propriété de confluence des géodésiques

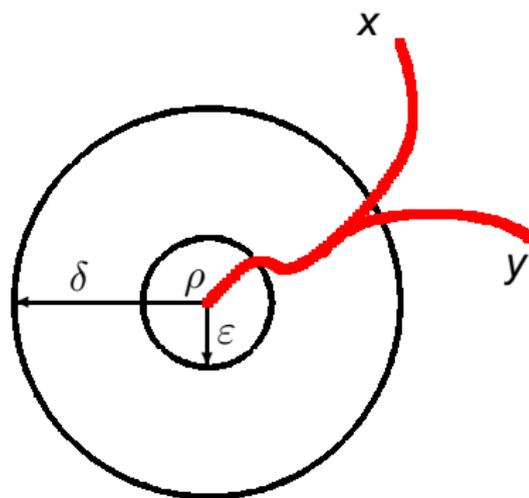
## Corollaire

Etant donné  $\delta > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  t.q.

- si  $D(\rho, x) \geq \delta$ ,  $D(\rho, y) \geq \delta$
- si  $\gamma$  est une géodésique entre  $\rho$  et  $x$
- si  $\gamma'$  est une géodésique entre  $\rho$  et  $y$

alors

$$\gamma(t) = \gamma'(t) \quad \text{pour tout } t \leq \varepsilon$$



“Une seule manière” de quitter  $\rho$  le long d’une géodésique.  
(aussi vrai si  $\rho$  est remplacé par un point typique de  $\mathbf{m}_\infty$ )

# Unicité des géodésiques dans les cartes discrètes

$M_n$  de loi uniforme sur  $\mathbb{M}_n^{2p} = \{2p\text{-angulations à } n \text{ faces}\}$

$V(M_n)$  ensemble des sommets de  $M_n$ ,  $\partial$  racine of  $M_n$ ,  $d_{\text{gr}}$  distance de graphe

Pour  $v \in V(M_n)$ ,  $\text{Geo}(\partial \rightarrow v) = \{\text{géodésiques de } \partial \text{ à } v\}$

Si  $\gamma, \gamma'$  sont deux chemins discrets (de même longueur)

$$d(\gamma, \gamma') = \max_i d_{\text{gr}}(\gamma(i), \gamma'(i))$$

## Corollaire

Soit  $\delta > 0$ . Alors,

$$\frac{1}{n} \#\{v \in V(M_n) : \exists \gamma, \gamma' \in \text{Geo}(\partial \rightarrow v), d(\gamma, \gamma') \geq \delta n^{1/4}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Unicité **macroscopique** des géodésiques, aussi vraie pour les “géodésiques approchées” = chemins de longueur

$$d_{\text{gr}}(\partial, v) + o(n^{1/4})$$

# Unicité des géodésiques dans les cartes discrètes

$M_n$  de loi uniforme sur  $\mathbb{M}_n^{2p} = \{2p\text{-angulations à } n \text{ faces}\}$

$V(M_n)$  ensemble des sommets de  $M_n$ ,  $\partial$  racine of  $M_n$ ,  $d_{\text{gr}}$  distance de graphe

Pour  $v \in V(M_n)$ ,  $\text{Geo}(\partial \rightarrow v) = \{\text{géodésiques de } \partial \text{ à } v\}$

Si  $\gamma, \gamma'$  sont deux chemins discrets (de même longueur)

$$d(\gamma, \gamma') = \max_i d_{\text{gr}}(\gamma(i), \gamma'(i))$$

## Corollaire

Soit  $\delta > 0$ . Alors,

$$\frac{1}{n} \#\{v \in V(M_n) : \exists \gamma, \gamma' \in \text{Geo}(\partial \rightarrow v), d(\gamma, \gamma') \geq \delta n^{1/4}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Unicité **macroscopique** des géodésiques, aussi vraie pour les “géodésiques approchées” = chemins de longueur

$$d_{\text{gr}}(\partial, v) + o(n^{1/4})$$

# Points exceptionnels dans les cartes discrètes

$M_n$   $2p$ -angulation à  $n$  faces de loi uniforme

Pour  $v \in V(M_n)$ , et  $\delta > 0$ , on pose

$$\text{Mult}_\delta(v) = \max\{k : \exists \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \text{Geo}(\partial, v), d(\gamma_i, \gamma_j) \geq \delta n^{1/4} \text{ if } i \neq j\}$$

(nombre de géodésiques “macroscopiquement différentes” de  $\partial$  à  $v$ )

## Corollaire

1. Pour tout  $\delta > 0$ ,  $P[\exists v \in V(M_n) : \text{Mult}_\delta(v) \geq 4] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
2. Mais  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} P[\exists v \in V(M_n) : \text{Mult}_\delta(v) = 3] \right) = 1$

Au plus **3 géodésiques différentes** entre  $\partial$  et un sommet de  $M_n$ .

**Remarque.**  $\partial$  peut être remplacé par un sommet typique de  $M_n$ .

Autres résultats sur les géodésiques dans les quadrangulations:

[Bouttier-Guitter \(2008\)](#)

# Points exceptionnels dans les cartes discrètes

$M_n$   $2p$ -angulation à  $n$  faces de loi uniforme

Pour  $v \in V(M_n)$ , et  $\delta > 0$ , on pose

$$\text{Mult}_\delta(v) = \max\{k : \exists \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \text{Geo}(\partial, v), d(\gamma_i, \gamma_j) \geq \delta n^{1/4} \text{ if } i \neq j\}$$

(nombre de géodésiques “macroscopiquement différentes” de  $\partial$  à  $v$ )

## Corollaire

1. Pour tout  $\delta > 0$ ,  $P[\exists v \in V(M_n) : \text{Mult}_\delta(v) \geq 4] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
2. Mais  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} P[\exists v \in V(M_n) : \text{Mult}_\delta(v) = 3] \right) = 1$

Au plus **3 géodésiques différentes** entre  $\partial$  et un sommet de  $M_n$ .

**Remarque.**  $\partial$  peut être remplacé par un sommet typique de  $M_n$ .

Autres résultats sur les géodésiques dans les quadrangulations:

[Bouttier-Guitter \(2008\)](#)

## Quelques références

BOUTTIER, GUITTER: The three-point function of planar quadrangulations. J. Stat. Mech. Theory Exp. (2008)

BOUTTIER, GUITTER: Statistics of geodesics in large quadrangulations. J. Phys. A 41 (2008)

CHASSAING, SCHAEFFER: Random planar lattices and integrated super-Brownian excursion. PTRF (2004)

LE GALL: The topological structure of scaling limits of large planar maps. Invent. Math. (2007)

LE GALL: Geodesics in large planar maps and in the Brownian map. Acta Math., à paraître.

MARCKERT, MOKKADEM: Limit of normalized quadrangulations: The Brownian map. Ann. Probab. (2006)

MARCKERT, MIERMONT: Invariance principles for random bipartite planar maps. Ann. Probab. (2006)

MIERMONT: Tesselations of random maps of arbitrary genus. Ann. Sci. ENS (2009)