

## Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures

Session organisée par **Anne Gégout-Petit**

L'étude de la dégradation et du vieillissement des structures ou des matériels embarqués nécessite la modélisation de phénomènes mécaniques de fatigue. Cette modélisation conditionne les calculs de durées de vie et de probabilités d'occurrence d'événements redoutés et est donc particulièrement importante en ce qui concerne la sécurité. Même soumis à des régimes de fatigue contrôlés, les phénomènes d'initiation ou de propagation de fissures présentent un caractère aléatoire. La prise en compte de l'aspect stochastique dans les modélisations est donc incontournable et devient indispensable en ce qui concerne la fatigue sous chargement aléatoire. Les exposés de cette session présentent différentes modélisations stochastiques pour des problèmes de fissuration adaptés suivant le cas à l'initiation ou la propagation et à différents matériaux (aluminium, béton, revêtements,...). Les outils stochastiques développés sont divers et variés : modèles de régression multivariés[3], processus de Poisson [2], processus Gamma, processus markoviens déterministes par morceaux [1]...

### *Références :*

- [1] CHIQUET, J., AND LIMNIOS, N. Piecewise deterministic Markov processes applied to fatigue crack growth modelling. *Jour. Stat. Plann. Inf.* 139, 9 (2009), 1657–1667.
- [2] MÉZIN, A., AND VALLOIS, P. Statistical Analysis of Unidirectional Multicracking of Coatings by a Two-Dimensional Poisson Point Process. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 5 (2000), 417–440.
- [3] PERRIN, F. Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures. Thèse, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II.

### *Adresse de l'organisateur :*

Anne GÉGOUT-PETIT

Institut Mathématiques de Bordeaux, Equipe INRIA CQFD

Université Victor Segalen Bordeaux 2

3, Place de la Victoire 33 076 Bordeaux France

E-mail : [anne.petit@u-bordeaux2.fr](mailto:anne.petit@u-bordeaux2.fr)

<<http://www.sm.u-bordeaux2.fr/~agp>>

Session : Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures

## Calcul de moments pour un réseau de fissures unidirectionnel

par **Pierre VALLOIS**, Pierre CALKA et André MEZIN

On considère un réseau de fissures sur un segment  $[0, L]$  et on suppose que le phénomène de fissuration a lieu sans relaxation de contrainte. La localisation de la  $i$ -ième fissure a lieu en  $X_i$  et est aléatoire.

1) Dans

Mézin A. et Vallois P., *Statistical Analysis of Unidirectional Multicracking of Coatings by a Two-Dimensional Poisson Process*, Mathematics and Mechanics of Solids, 5, 417-440, 2000,

il est montré que le nombre  $\tau := N^\epsilon([0, L])$  de fissures se formant sur  $[0, L]$  est une v.a. de Poisson de paramètre  $LF(\epsilon)$ , où  $F(\epsilon)$  est la probabilité de rupture lorsque la contrainte appliquée est  $\epsilon$ . De plus, pour tout entier  $k$ , il a été calculé  $E(\widetilde{M}_{k,\tau} | \tau \geq 2)$ , où

$$(1) \quad \widetilde{M}_{k,\tau} := \frac{\widetilde{m}_{k,\tau}}{(\widetilde{m}_{1,\tau})^k}$$

$$(2) \quad \widetilde{m}_{l,\tau} := \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau-1} (X_{(i+1)} - X_{(i)})^l, \quad (l \text{ entier}),$$

et  $X_{(1)}, \dots, X_{(\tau)}$  est le ré-arrangement croissant de  $X_1, \dots, X_\tau$ .

2) Il est en fait plus intéressant, d'un point de vue physique, de considérer le moment d'ordre  $k$  associé à un nombre fixé  $n$  de fissures et de prendre en compte les "bords" (i.e. sommer dans (2) de  $i = 0$  à  $i = n$ ) :

$$M_{k,n} := \frac{(n+1)^{k-1}}{L^k} \sum_{i=0}^n (X_{(i+1)} - X_{(i)})^k,$$

avec  $X_{(0)} := 0$  et  $X_{(n+1)} := L$ .

On s'intéresse à la suite  $(M_{k,n}, n \geq 2)$ . On calcule en particulier l'espérance et la variance de  $M_{k,n}$ . On étudie également la convergence au premier et au second ordre de  $(M_{k,n}, n \geq 2)$ .

Journées MAS 2010, Bordeaux

*Adresses :*

Pierre VALLOIS

Institut Elie Cartan, Nancy-Université, CNRS, INRIA,  
Boulevard des Aiguillettes, B.P. 239,  
F54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex  
E-mail : [vallois@iecn.u-nancy.fr](mailto:vallois@iecn.u-nancy.fr)

Pierre CALKA

Université Paris Descartes, MAP5  
45, rue des Saints-Pères  
75270 Paris Cedex 06  
E-mail : [pierre.calka@mi.parisdescartes.fr](mailto:pierre.calka@mi.parisdescartes.fr)  
<<http://www.math-info.univ-paris5.fr/~calka/>>

André MEZIN

Laboratoire de Sciences et Génie des Surfaces, U.M.R. CNRS 7570  
Ecole des Mines de Nancy  
Parc de Saurupt - CS 14234  
F-54042 NANCY CEDEX  
E-mail : [Andre.Mezin@mines.inpl-nancy.fr](mailto:Andre.Mezin@mines.inpl-nancy.fr)  
<<http://www.math-info.univ-paris5.fr/~calka/>>

Session : Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures

Session : Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures

## **Couplages de modèles mécaniques et probabilistes pour la prévision de la fissuration des structures en fatigue**

par **Bruno Sudret**

Le phénomène de propagation de fissures en fatigue (application de cycles de contrainte répétés) est à l'origine de plus de 80% des ruptures accidentelles de composants mécaniques tous secteurs industriels confondus. Les ingénieurs doivent donc intégrer ce phénomène dans la conception des structures, que ce soit pour l'aéronautique, l'automobile, l'ingénierie navale ou encore nucléaire.

Cependant, le phénomène de fatigue est par nature *aléatoire* : les microfissures s'amorcent sur des défauts présents à l'échelle microscopique (défauts de surface, inclusions de type carbure, etc.) qui peuvent être naturellement très différents d'une pièce à l'autre. Cependant, la pratique courante en ingénierie est essentiellement déterministe, et s'appuie sur des modèles très simplifiés (loi de propagation de Paris, approche S/N et cumul de Miner, etc.) dans lesquels sont pris d'importants *coefficients de sécurité* visant à se prémunir contre l'aléa naturel du phénomène.

Dans cette communication, on montre comment marier les modèles mécaniques évoqués précédemment avec une modélisation rigoureuse de l'aléa : à partir d'un traitement statistique de données, on infère les lois de probabilités des paramètres des modèles, et on *propage* ensuite cette incertitude paramétrique à travers le modèle. On tire ainsi parti à la fois de la connaissance physique du phénomène et des données statistiques.

L'exposé présentera différentes méthodes et des applications industrielles d'envergure (collecteur d'échappement automobile, fissuration de plaques).

*Adresse :*

Bruno SUDRET

Phiméca Engineering

241 rue de Bercy

75012 Paris – France

E-mail : [sudret@phimeca.com](mailto:sudret@phimeca.com)

<<http://www.phimeca.com>, <http://bruno.sudret.free.fr>>

Journées MAS 2010, Bordeaux

Session : Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures

## **Temps d'atteinte pour un processus gamma non-homogène**

par **Christian Paroissin**

On considère le processus gamma non-homogène comme modèle de dégradations (propagation de fissures, etc.). Le problème de la loi du temps d'atteinte pour un tel processus est étudié ici. Deux cas sont considérés : d'abord, le cas d'un seuil constant déterministe ; ensuite, le cas d'un seuil aléatoire. Dans ce dernier cas, on donne une expression explicite dans le cas d'une approximation par une loi de type-phase (mélange de lois d'Erlang).

*Adresse :*

Christian PAROISSIN

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications (UMR CNRS 5142)

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Avenue de l'Université

64000 Pau, France

E-mail : [cparoiss@univ-pau.fr](mailto:cparoiss@univ-pau.fr)

<<http://web.univ-pau.fr/~cparoiss/>>

Session : Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures

Session : Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures

## **Modélisation de propagation de fissure par un processus markovien déterministe par morceaux**

par **Romain Azaïs**, Anne Gégout-Petit et Marie Touzet

On s'intéresse à un modèle de propagation de fissures fondé sur la loi déterministe de Paris-Erdogan.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad \text{où } \Delta K = \Delta\sigma F\left(\frac{a}{\omega}\right)\sqrt{\pi a}$$

Une analyse des données de Virkler - propagation de fissures pré-initialisées dans des éprouvettes en aluminium 2024-T3 - montrent l'intérêt d'un modèle mêlant sauts aléatoires et flot déterministe pour ce problème.

On propose de modéliser la longueur d'une fissure dans les conditions de Virkler par un processus markovien déterministe par morceaux. Le flot déterministe est donné par la loi de Paris-Erdogan dont le couple de paramètres  $(m, C)$  est susceptible de varier aléatoirement lors d'au plus un instant de saut aléatoire.

Il est nécessaire de proposer pour définir complètement ce processus : l'espace d'états des paramètres et de la longueur de la fissure, la loi initiale des paramètres, le noyau de transition des paramètres ainsi que la loi de l'instant de saut. Ceci est fait en concordance avec les ajustements réalisés sur les données de Virkler.

A partir d'un petit nombre de mesures réalisées dans les premiers moments de l'expérience, on souhaiterait mieux prédire l'évolution d'une fissure donnée. On propose d'actualiser le modèle précédent en affinant l'espace d'états du processus ainsi que le noyau de transition des paramètres.

## **Références**

- [1] F. Perrin. Prise en compte des données expérimentales dans les modèles de prévision de la durée de vie des structures. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II, 2008.

Journées MAS 2010, Bordeaux

- [2] D.A. Virkler, B.M. Hillberry, et P.K. Goel. The statistical nature of fatigue crack propagation. *Journal of Engineering Material Technology ASME*, 101 : 148–153, 1979.

*Adresses :*

Romain AZAÏS

Institut Mathématiques de Bordeaux, Equipe INRIA CQFD  
351 Avenue de la Libération  
33 405 TALENCE France  
E-mail : [romain.azais@neuf.fr](mailto:romain.azais@neuf.fr)

Anne GÉGOUT-PETIT

Institut Mathématiques de Bordeaux, Equipe INRIA CQFD  
Université Victor Segalen Bordeaux 2  
3, Place de la Victoire 33 076 Bordeaux France  
E-mail : [anne.petit@u-bordeaux2.fr](mailto:anne.petit@u-bordeaux2.fr)  
<<http://www.sm.u-bordeaux2.fr/~agp>>

Marie TOUZET

Laboratoire de Mécanique Physique UMR 5469  
Université Bordeaux 1  
351 Avenue de la Libération  
33 405 TALENCE France  
E-mail : [m.touzet@lmp.u-bordeaux1.fr](mailto:m.touzet@lmp.u-bordeaux1.fr)

Session : Modèles probabilistes pour l'initiation et la propagation de fissures