Formes différentielles en L1 (filières Physique/Chimie)

Le cours : Notions sur les formes différentielles de degré 1 sur $\mathbb{R}^2$

Les formes différentielles sont introduites via les **développements limités à l'ordre 1** pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sont abordées les notions de différentielles, de formes exactes, de primitives, d'intégrales curvilignes le long d'un arc et de circulation d'un champ de vecteurs.

La feuille d'exercices Wims

- 1. Développement limité à l'ordre 1, 0 des 10 points requis, qualité 0/10.
- 2. différentielle d'une fonction, 0 des 10 points requis, qualité 0/10.
- 3. forme différentielle exacte, 0 des 10 points requis, qualité 0/10.
- 4. forme différentielle exacte (II), 0 des 10 points requis, qualité 0/10.
- 5. Intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'un arc, 0 des 10 points requis, qu
- 6. Intégrales curvilignes 1, 0 des 10 points requis, qualité 0/10.
- 7. Intégrales curvilignes 2, 0 des 10 points requis, qualité 0/10.
- 8. Forme différentielle et champ, 0 des 10 points requis, qualité 0/10.
- 9. Travail 1, Pour les calculs, utilisez la "calculatrice de fonctions" et votre cours p. 38 vecteurs) 0 des 10 points requis, qualité 0/10.

Exercices sur la différentielle en un point

► sur les développements limités à l'ordre 1

Exercice.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \arctan\left(\sqrt{x+y}\right).$$

Déterminer le développement limité d'ordre 1 de f en (3,6)

f(3+h,6+k)= [ ] + [ ] h+ [ ] k +o(h,k)

Envoyer la réponse

Recommencer l'exercice.

► sur la différentielle d'une fonction en un point

On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

1. Déterminer la différentielle de f en (x,y)

   $d_{(x,y)}f=$ [ ] dx+ [ ] dy

2. Déterminer la différentielle de f en (4,5)

   $d_{(4,5)}f=$ [ ] dx+ [ ] dy

Envoyer la réponse

Recommencer l'exercice.

► analyse par Wims de la réponse envoyée :

1. Déterminer la différentielle de f en (x,y)

   $d_{(x,y)}f=$ `x/sqrt(y^2+x^2)`[1] dx+ `y/sqrt(y^2+x^2)`[2] dy

2. Déterminer la différentielle de f en (4,5)

   $d_{(4,5)}f=$ `4/sqrt(41)`[3] dx+ `2/sqrt(31)`[4] dy

Analyse de votre réponse.

[1] `x/sqrt(y^2+x^2)` : bonne réponse.
[2] `y/sqrt(y^2+x^2)` : bonne réponse.
[3] `4/sqrt(41)` : bonne réponse.
[4] `2/sqrt(31)` : mauvaise réponse, la bonne réponse est `5/sqrt(41)`.

Primitives d'une 1-forme

- Niveau 1 :

Exercice.

On considère la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x,y) = \frac{x\,dx}{\sqrt{y^2+x^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+x^2}}$$

Vérifier qu'elle est exacte et déterminer une fonction f (de constante nulle) telle que ω=df

f(x,y)= [ ]

Envoyer la réponse

- Niveau 2 :

Exercice.

On considère la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x,y) = \left(\frac{9}{2\sqrt{3y+9x}} + 6x^5y + \sin(x) + x\cos(x)\right)dx + \left(\frac{3}{2\sqrt{3y+9x}} + x^6\right)dy$$

Vérifier qu'elle est exacte et déterminer une fonction f (de constante nulle) telle que ω=df

f(x,y)= [ ]

Envoyer la réponse

Recommencer l'exercice.

Intégrale curviligne d'une forme différentielle

► deux méthodes pour calculer une intégrale curviligne :

Exercice.

On considère la forme différentielle ω définie par :

$\omega(x,y)= 14x\,dx+ 3dy$

et γ=([0,1], $\vec{F}$), l'arc paramétré du plan défini par $\vec{F}(t)= (5(t^3+1),2(2t^3+1))$

1. En utilisant la paramétrisation de l'arc γ, calculer l'intégrale curviligne de ω le long de γ.

   $\int_\gamma \omega=$ [ ]

2. Vérifier que ω est exacte et déterminer une fonction f (de constante nulle) telle que ω=df

   f(x,y)= [ ]

3. Soit A=F(0) et B=F(1). Calculer

   f(A)= [ ] , f(B)= [ ] , f(B)-f(A)= [ ]

Envoyer la réponse

Recommencer l'exercice.

► choix d'une paramétrisation et calcul d'une intégrale curviligne :

Exercice. Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $(2x-(3x+3)\,y)\,dx + (-5x^2\,y)\,dy$ le long de C

$$\int_C (2x-(3x+3)\,y)\,dx + (-5x^2\,y)\,dy$$

où C est la courbe (orientée) formée des segments qui joignent les points (1, 0) à (0,0), (0,0) à (1, -4) et (1, -4) à (1, -7).

Entrez votre réponse :
Premier segment = [ ]
Deuxième segment = [ ]
Troisième segment = [ ]
Intégrale = [ ]

Envoyer la réponse

Indication. Recommencer l'exercice.

► une indication peut être ajoutée à l'exercice :

Indication. Paramétrer d'abord chacun des segments : par exemple, si $A = (a\ ,b)$ et $B = (c\ ,d)$, les points du segment AB (parcourus de A vers B) sont paramétrés par $M = (1 - t)\,A + t\,C$ avec $t \in [0\ ,1]$. Puis transformer l'intégrale curviligne en somme d'intégrales ordinaires.

Circulation d'un champ de vecteurs

► Un exercice important pour des physiciens :

Exercice. Calculer le travail effectué par le champ de forces F défini par

$$F(x\ ,y) = (40.771x\,y - 5.908y)\,\vec{i} + (32.983x - 85.331y^2)\,\vec{j}$$

pour déplacer une particule le long d'un arc de cercle de rayon 1, de centre 0 et d'angle variant entre 0 et $\pi/2$ dans le sens trigonométrique.

Entrez votre réponse :
travail = [ ]

Envoyer la réponse

Recommencer l'exercice.

Jean-Yves Boyer