Systèmes dynamiques

utilisation de WIMS en L3 MFA

Systèmes dynamiques sur $\mathbb{R}$

Soit $f : I \to \mathbf{I}$ une application continue d'un intervalle I dans lui-même, I est éventuellement égal à $\mathbf{R}$ ou $\overline{\mathbf{R}}$. On peut répéter l'opération un nombre infini de fois et pour x élément de I, on peut regarder l'orbite $O(x)$ de x :

$$O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x), \cdots\}$$

Le but est de d'écrire ces orbites qui pour des données initiales très proches peuvent avoir des comportements très différents. On dit alors que le système est **chaotique**.
Les orbites périodiques forment très souvent un ensemble dense.

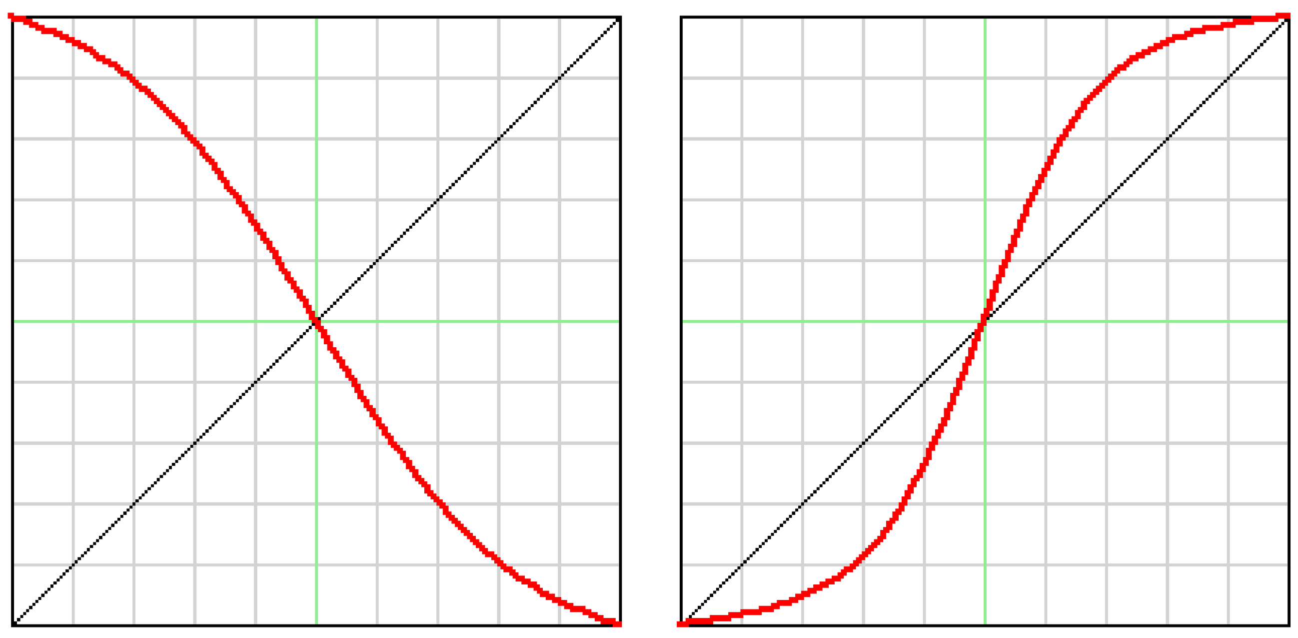
Etude des orbites finies

On cherche tout d'abord les points fixes et leur nature : attractif ? répulsif ? puis si c'est possible les points périodiques de période $k > 1$. Une fois cette étude faite, on cherche **le portrait de phase**, schéma graphique qui décrit l'allure de toutes les orbites.

Points fixes

Exercice.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application de l'intervalle. Les graphes de f (gauche) et de $f \circ f$ (droite) sont représentés en rouge.



L'application f a 1 point fixe. Aucun de ces points n'est attractif.
Combien de points périodiques de période exactement 2 f a-t-elle ?

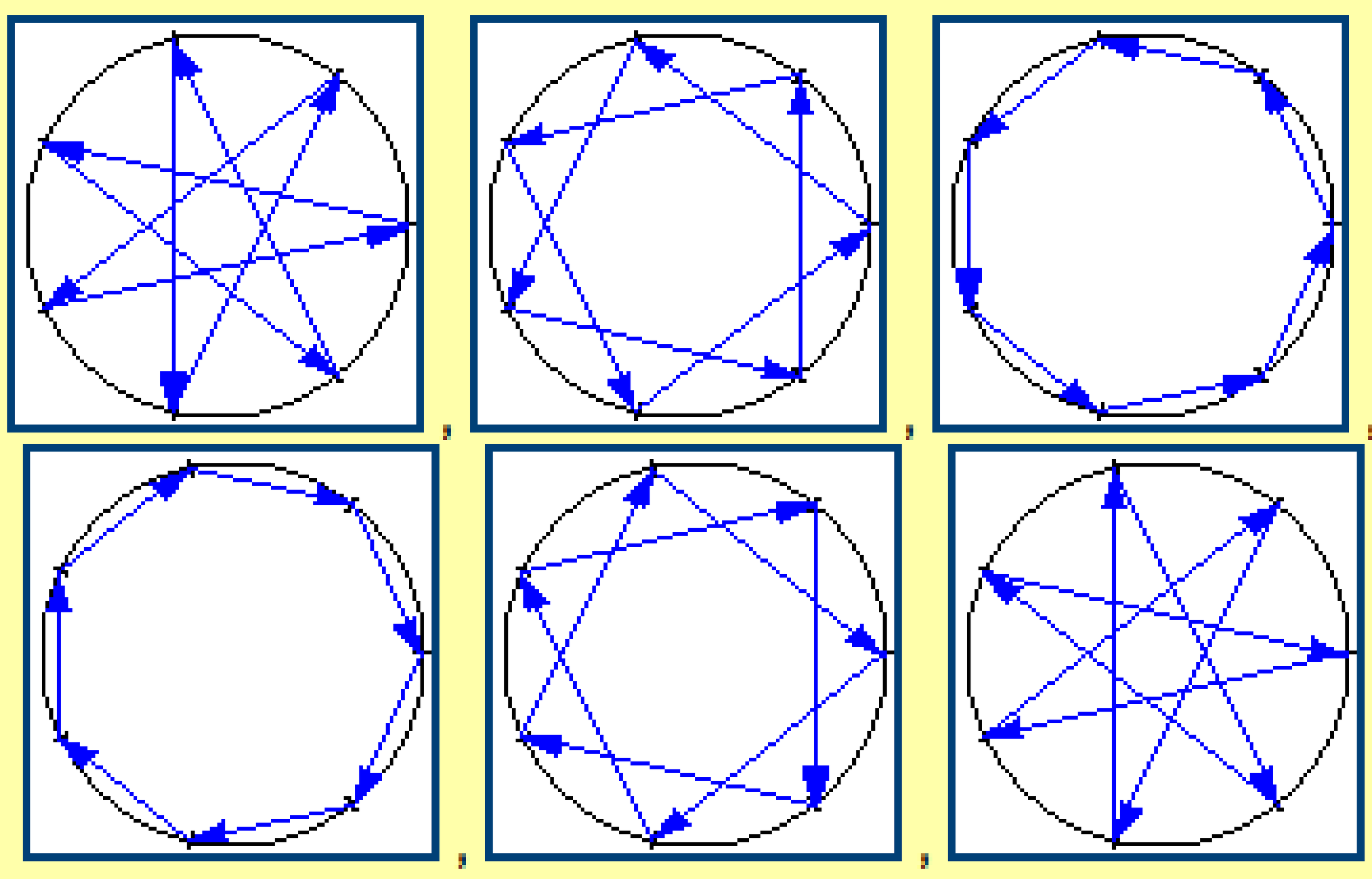
○ aucun, ○ 1, ⊙ 2, ○ 3, ○ 4, ○ 5, ○ 6, ○ 7

Envoyer la réponse

Un exercice WIMS (rotation)

Soit R_θ la rotation du cercle d'angle $2\pi\theta$, où $\theta = \frac{3}{7}$.

Indiquez la représentation correcte de la dynamique sur l'orbite périodique de 0

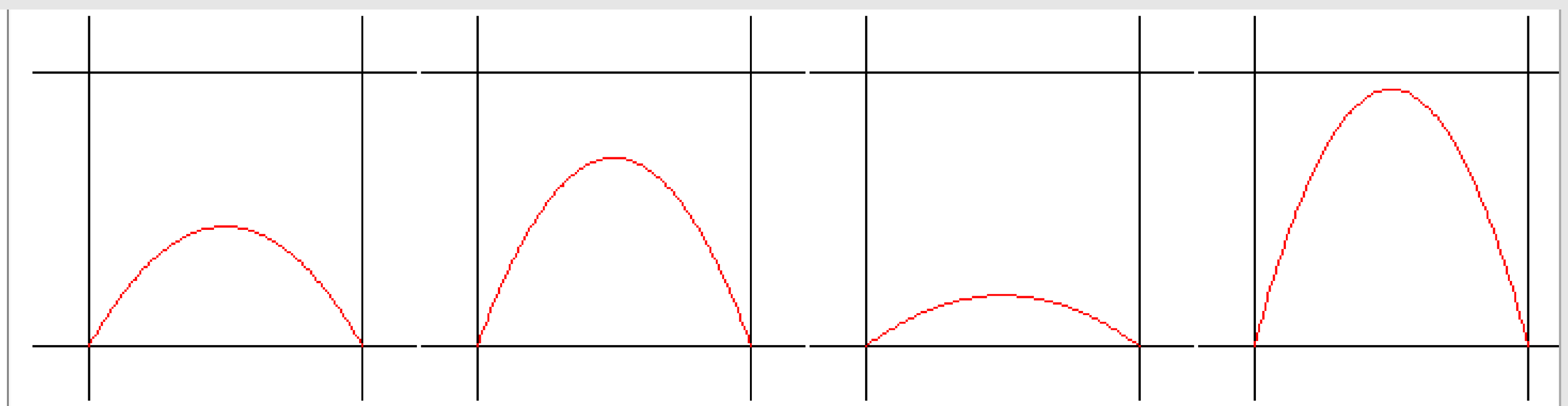


Familles d'applications étudiées

- la famille logistique $f(x) = ax(1-x)$ où $a > 0$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$
- les rotations d'angle $2\pi a$ sur le cercle unité
- les applications standard sur le cercle unité

La famille logistique : suivant les valeurs du paramètre a, le comportement est très différent

Lorsque le paramètre a vérifie $0 < a \leq 1$, tout est attiré vers 0. Lorsqu'il croît de 1 à 4, apparaissent un point fixe non nul attractif puis un point de période 2 attractif tandis que le point fixe devient répulsif puis cela est beaucoup plus compliqué autour de $a = 3.57...$ pour finalement être **chaotique** pour $a > 4$. La dynamique s'identifie alors à celle de l'espace symbolique (Σ, σ) où Σ est l'ensemble des suites infinies $s = (s_0, s_1, \cdots)$, avec $s_i = 0$ ou $s_i = 1$ et $\sigma(s) = (s_1, \cdots)$ le décalage.



1 2 3 4

Des exercices WIMS sur l'espace symbolique

Exercice.

(Σ_2, σ) est le système dynamique à 2 symboles où :

- Σ_2, est l'ensemble des suites infinies $S = (s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)$ avec s_n égal à 0 ou 1.
- $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ est le décalage (vers la droite),

$$\sigma((s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)) = (s_1, \cdots, s_n, \cdots).$$

Parmi les éléments de Σ_2, notons Σ' l'ensemble des suites telles que si $s_n = 1$, alors

$$s_{n+1} = 0, s_{n+2} = 1$$

Combien y-a-t-il de points fixes de σ dans Σ' ?

Exercice.

(Σ_2, σ) est le système dynamique à 2 symboles où :

- Σ_2, est l'ensemble des suites infinies $S = (s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)$ avec s_n égal à 0 ou 1.
- $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ est le décalage (vers la droite),

$$\sigma((s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)) = (s_1, \cdots, s_n, \cdots).$$

Parmi les éléments de Σ_2, notons Σ' l'ensemble des suites telles que si $s_n = 1$, alors

$$s_{n+1} = 0.$$

Combien y-a-t-il de points fixes de σ dans Σ' ?

- Séances de TD en salle info de 1 heure tous les quinze jours
- D'autres exercices dans le module OEF Systèmes dynamiques