ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017
Licence de mathématiques, Ingénierie mathématique, UE TGM601U
Examen d'Analyse Fonctionnelle : Epreuve de A. Bachelot.
Date : Lundi 24 avril 2017 **Heure :** 9h-12h. **Durée :** 3h.
Lieu : bâtiment A33, Grand Amphithéâtre de Mathématiques.
- Un aide-mémoire d'une page est autorisé -

Collège Sciences et technologie

1

On considère un espace métrique (E, d).

(1) Etant donné $a \in E$, montrer que l'application
$$x \in E \mapsto d(x, a) \in \mathbb{R}$$
est continue de (E, d) dans $\mathbb{R}$ muni de la distance associée à la valeur absolue.

(2) Soit a_0 un point de E. Montrer que pour tout $a \in E$, l'application
$$f_a(x) = d(x, a) - d(x, a_0)$$
est continue et bornée de E dans $\mathbb{R}$.

(3) On note $C_b^0(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de E dans $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in C_b^0(E, \mathbb{R})$ on pose
$$\| \varphi \| = \sup_{x \in E} | \varphi(x) | .$$
Montrer que $\| \, . \, \|$ est une norme sur $C_b^0(E, \mathbb{R})$ et que $(C_b^0(E, \mathbb{R}), \| \, . \, \|)$ est un espace de Banach.

(4) Etant donnés $a, b \in E$, évaluer
$$\| f_a - f_b \| .$$

(5) En utilisant ce qui précède, construire un espace métrique complet $(\hat{E}, \hat{d})$, et une application f de E dans $\hat{E}$ tels que $f(E)$ soit dense dans $\hat{E}$, et que pour tout $a, b \in E$ on ait
$$\hat{d}(f(a), f(b)) = d(a, b).$$

2

Soit $E = \mathbb{R}[t]$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes d'une variable, à coefficients réels. Pour $f \in E$ on pose

$$N_1(f) = \int_0^1 | f(t) | \, dt, \quad N_2(f) = | f(0) | + \int_0^1 t \, | f'(t) | \, dt, \quad N_3(f) = N_1(f) + N_2(f). \tag{1}$$

(1) Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit
$$f_n(t) = 1 - (1 - t)^n.$$
Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (E, N_1) et dans (E, N_2) vers des limites que l'on déterminera. Converge-t-elle dans (E, N_3) ?

(3) On note E_3 l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, définies et bornées sur $[0, 1]$, dérivables sur $]0, 1]$, dont la dérivée est continue et bornée sur $]0, 1]$. Sur E_3 on définit encore des applications N_1, N_2 et N_3 par les relations (1). Montrer que N_3 est une norme sur E_3. N_1 et N_2 sont-elles des normes sur E_3 ?

(4) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans (E_3, N_3).

(5) *Hélène* déclare : "Considère, cher Agamemnon, un espace vectoriel réel E muni de deux normes N_1 et N_2, et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, convergente dans (E, N_1) vers une limite l_1 et convergente dans (E, N_2) vers une limite l_2. Alors si N_1 et N_2 sont équivalentes, $l_1 = l_2$."

Agamemnon rétorque : "Fascinant ma chère Hélène, toutefois il est inutile de supposer que N_1 et N_2 sont équivalentes. Considère en effet $N_3 = N_1 + N_2$, et écoute mon raisonnement :
(1) N_3 est une norme sur E.
(2) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans le complété $\hat{E_3}$ de (E, N_3) vers une limite l_3.
(3) N_1 et N_2 se prolongent de façon unique en des applications définies continues sur $\hat{E_3}$, que je note encore N_1 et N_2.
(4) On a : $N_1(l_1 - l_3) = N_2(l_2 - l_3) = 0$.
(5) J'en déduis que $l_1 = l_3$ et $l_2 = l_3$, ce qui montre, ma chère Hélène, que $l_1 = l_2$!

Justifiez l'assertion d'*Hélène*, et justifiez ou critiquez les cinq points de l'argumentation d'*Agamemnon*.

3

Soit X la boule unité fermée d'un espace de Hilbert $(H, \| \,.\, \|)$.

(1) On considère une application f de X dans X. On suppose qu'il existe $C \in [0, 1[$ tel que pour tout $x, y \in X$, on ait :
$$\| f(x) - f(y) \| \leq C \| x - y \| .$$
On définit la suite $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq C^n \| x_1 - x_0 \| .$$
En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(2) Montrer qu'il existe un unique point $x \in X$ tel que $f(x) = x$.

On considère maintenant une application g de X dans X telle que pour tout $x, y \in X$, on ait :
$$\| g(x) - g(y) \| \leq \| x - y \| .$$

(3) Pour tout entier n on définit $g_n(x) = \frac{n}{n+1} g(x)$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tel que $g_n(x_n) = x_n$.

(4) Montrer qu'il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et un point $x \in X$, tel que pour tout $y \in H$, on ait :
$$< x_{n_k}, y > \longrightarrow < x, y >, \quad k \to \infty.$$

(5) Montrer que
$$\| g(x_n) - g(x_{n_k}) \|^2 \leq \| x_n \|^2 + \| x_{n_k} \|^2 - 2\Re < x_n, x_{n_k} >,$$
où $\Re z$ désigne la partie réelle du nombre complexe z.

(6) En développant le membre de gauche de l'inégalité précédente, en déduire que
$$\| x_n \|^2 \leq \frac{2n}{2n+1} \Re < x_n, x > .$$
et
$$\| x_n - x \|^2 \leq \| x \|^2 - \left(2 - \frac{2n}{2n+1} \right) \Re < x_n, x > .$$

(7) Montrer que $g(x) = x$.

◇♣◇♣◇♣◇
♣◇♣◇♣
◇♣◇
♣