Université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018
CPBX PC Ecole Semestre 4 - UE N1CP402D
Devoir surveillé d'Analyse.
Date : Lundi 9 avril 2018 **Heure :** 14h.-15h30. **Durée :** 1h30 -
Sans document.

Collège Sciences et technologie

Exercice 1.

1. Calculer l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - t + 1} dt.$$

2. Montrer que la suite
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 - nk + k^2}$$
admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

Exercice 2.

Soit $R \in [0, 1[$.

1. Calculer
$$I = \int_0^R \frac{t}{1 - t^2} dt$$

2. Montrer que pour tout $t \in [0, R]$ et tout N entier, on a
$$0 \leq \frac{t}{1 - t^2} - \sum_{k=0}^{N} t^{2k+1} \leq \frac{t^{2N+3}}{1 - R^2}.$$

3. En déduire que l'on a
$$0 \leq \ln\left(\frac{1}{1 - R^2}\right) - \sum_{k=0}^{N} \frac{R^{2(k+1)}}{k+1} \leq \frac{R^{2N+4}}{(1 - R^2)(N + 2)}.$$

4. Comment peut-on calculer facilement une approximation de $\ln(4/3)$ avec deux chiffres exacts après la virgule ?

Exercice 3.

Soient
$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}, \quad g(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$$

1. Montrer que f est intégrable sur $]1, 2]$.
2. Montrer que g est intégrable sur $[2, \infty[$.
3. En déduire que l'intégrale généralisée de f sur $[2, \infty[$ existe.
4. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[2, \infty[$.

Exercice 4.

Etant donné $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que $f(x)$ est bien défini.
2. Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et calculer $f'(x)$.
3. En déduire la valeur de $f(x)$.

4. En déduire que pour tout $x > 0$ l'intégrale

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} e^{-y/x} dy$$

existe, et admet une limite que l'on calculera quand $x \to \infty$.