I-1 $K \subset \bigcup_{1}^{\infty} B(a,n)$; Borel-Lebesgue $\Rightarrow \exists N \mid K \subset \bigcup_{1}^{N} B(a,n) = B(a,N)$

I-2 $(x_n)_n \subset K$ Cauchy ; Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow \exists\, x_{n_k}, x \mid d(x_{n_k}, x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_1, k_2 \mid \forall p,q \geq k_1\ d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}\quad \forall k \geq k_2\ d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_2}}) + d(x_{n_{k_2}}, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq \max(k_1, n_{k_2})$.

I-3 $K_n \neq \emptyset\ \exists x_n \in K_n$; Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow \exists n_k, \exists x \mid x_{n_k} \to x$

$x_{n_k} \in K_N\quad \forall k \geq N$; K_N complet $\Rightarrow x \in K_N \Rightarrow x \in \bigcap K_N$

II-1 $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\alpha \Rightarrow f$ bornée ; $|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_\alpha \left(d(x,y)\right)^\alpha$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta = \left(\varepsilon / \|f\|_\alpha\right)^{1/\alpha} \mid d(x,y) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Sous espace vectoriel : évident.

II-2 $\|f\|_\alpha = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$; $\|\lambda f\|_\alpha = |\lambda|\, \|f\|_\alpha$; $f, g \in C^\alpha(E)$

$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$; $\quad \dfrac{|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))|}{|d(x,y)|^\alpha} \leq \dfrac{|f(x)-f(y)|}{(d(x,y))^\alpha} + \dfrac{|g(x)-g(y)|}{(d(x,y))^\alpha}$

$\Rightarrow \|f+g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha$.

II-3 f_n $\|\ \|_\alpha$-Cauchy $\Rightarrow f_n$ $\|\ \|_\infty$-Cauchy $\Rightarrow \exists f \in C^0(E) \mid$

$\|f_n - f\|_\infty \to 0$. $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \leq \|f_n - f_m\|_\alpha \left(d(x,y)\right)^\alpha$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \mid N \leq n, m\quad \|f_n - f_m\|_\alpha \leq \varepsilon \Rightarrow |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))| \leq \varepsilon \left(d(x,y)\right)^\alpha$

$\underset{m\to\infty}{\Rightarrow} |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))| \leq \varepsilon \left(d(x,y)\right)^\alpha \Rightarrow \|f_n - f\|_\alpha \leq \varepsilon$

et aussi $|f(x) - f(y)| = \lim |f_n(x) - f_n(y)| \leq \sup \|f_n\|_\alpha \left(d(x,y)\right)^\alpha$

$\Rightarrow f \in C^\alpha(E)$ et $f_n \to f$ dans $C^\alpha(E)$.

III-1 $|y_n(0)| = 0 \leq \frac{0}{n} M$, $k \to k+1$ $\quad |y_n(k+1)| \leq |y_n(k)| + \frac{1}{n} |f(y_n(k))| \leq \frac{k}{n} M + \frac{1}{n} M = \frac{k+1}{n} M$.

III-2 u_n est linéaire par morceaux $\lim\limits_{x \to \frac{k}{n}^+} u_n(x) = y_n(k)$; $\lim\limits_{x \to \frac{k}{n}^-} u_n(x) = \lim y_n(k-1) + \left(x - \frac{k-1}{n}\right) f(y_n(k-1))$

$= y_n(k)$

pour $x \neq \frac{k}{n}$ $\quad u_n'(x) = f(y_n(k))$ si $x \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$

$= f(v_n(x))$

u_n C^0 et C^1 par morceaux $\Rightarrow u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt = 0 + \int_0^x f(v_n(t))\,dt$.

III.3 $|u_n(x)| \leq \int_0^x |f(v_n(t))|\,dt \leq Mx \leq M \Rightarrow (u_n)_n$ bornée dans $C^0([0,1])$

$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \left|\int_x^y |f(v_n(t))|\,dt\right| \leq M|x-y| \Rightarrow (u_n)_n$ équicontinue

ASCOLI $\Rightarrow \exists u \in C^0([0,1])\ \exists n_p \mid \|u_{n_p} - u\|_\infty \to 0\ p \to \infty$

III.4 $|v_{n_p}(x) - u(x)| \leq |v_{n_p}(x) - u_{n_p}(x)| + |u_{n_p}(x) - u(x)|$

$$\leq \frac{1}{n_p} M + \|u_{n_p} - u\|_\infty \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

III.5 $u_{n_p}(x) = \int_0^x f(v_{n_p}(t))\,dt$; $u_{n_p}(x) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u(x)$

$f \in C^0 \Rightarrow \left((v_{n_p}(t) \to u(t)) \Rightarrow (f(v_{n_p}(t)) \to f(u(t))) \right)$ et $|f(v_{n_p}(t))| \leq M$

th de CV dominée $\Rightarrow \int_0^x f(v_{n_p}(t))\,dt \to \int_0^x f(u(t))\,dt$

$\Rightarrow u(x) = \int_0^x f(u(t))\,dt$; $u, f \in C^0 \Rightarrow f(u(t)) \in C^0 \Rightarrow u \in C^1$

et $u'(x) = f(u(x))$; $u(0) = 0$

IV.1 $F = \mathbb{R}x$; $u : F \to \mathbb{R}$, $\lambda x \mapsto u(\lambda x) = \lambda\|x\|$; $u \in F'$, $\|u\|_{F'} = 1$

Hahn-Banach $\Rightarrow \exists f \in E' \mid f|_F = u$ et $\|f\|_{E'} = \|u\|_{F'} = 1$.

IV.2 $x \equiv x_1 - x_2$; f précédent $f(x) = \|x\|$; $f(x) = f(x_1) - f(x_2)$, $\|x\| \neq 0$.

IV.3 a) Si $x \notin M$ qui est fermé $\exists r > 0 / B(x,r) \cap M = \emptyset \Rightarrow \delta \geq r > 0$.

b) $y + \lambda x = z + \mu x$, $y, z \in M$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow (\mu - \lambda)x = y - z \in M \Rightarrow x \in M$ impossible si $\mu - \lambda \neq 0$; donc $\mu = \lambda$ et $z = y$; donc $f(y + \lambda x) = \lambda\delta$ est défini.

IV.3b) $\dfrac{|f(y+\lambda x)|}{\|y+\lambda x\|} = \dfrac{|\lambda|\delta}{\|y+\lambda x\|} = \dfrac{|\lambda|\delta}{|\lambda|\underbrace{\left\|\frac{y}{\lambda} + x\right\|}_{\geq \delta}} \leq \dfrac{\delta}{\delta} = 1 \Rightarrow \|f\| \leq 1$

$(\lambda \neq 0)$

Soit $(y_n)_n \subset M \mid \|y_n - x\| \to \delta$

$\dfrac{|f(y_n - x)|}{\|y_n - x\|} = \dfrac{\delta}{\|y_n - x\|} \to 1 \Rightarrow \|f\| \geq 1 \Rightarrow \|f\| = 1$

c) Hahn-Banach $\Rightarrow$ on prolonge f

$\underline{\text{V-1}}$ On pose $\langle P, Q \rangle \equiv \int_0^1 P(x) Q(x)\, dx$ qui est bilinéaire symétrique.
$\langle P, P \rangle = \int_0^1 |P(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow P = 0$ p.p or $P \in C^0$ donc $P \equiv 0$
$\langle , \rangle$ est donc un produit scalaire et $\| P \| = \left(\int_0^1 |P|^2 \right)^{1/2}$ une norme.
$\dim H = 3 < +\infty$ donc H est complet donc Hilbert ; $\dim F = 2 < +\infty$
donc F est fermé car complet.

$\underline{\text{V-2}}$ $P_0(x) \equiv 1$ est normalisé. $\int_0^1 (x+a) 1\, dx = \frac{1}{2} + a$ donc
$x - \frac{1}{2}$ est orthogonal à 1 et $P_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ est normalisé.
La projection orthogonale sur F : $P_F(Q) = \langle Q, P_0 \rangle P_0 + \langle Q, P_1 \rangle P_1$
si $Q = x^2$, $\langle x^2, 1 \rangle = \frac{1}{3}$; $\langle x^2, P_1 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
$x^2 - P_F(x^2) = x^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$ est orthogonal
à F et $\| x^2 - x + \frac{1}{6} \|^2 = \frac{1}{180}$; $P_2 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$ est normalisé
$\left\{ 1, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \right\}$ base hilbertienne.

$\underline{\text{V.3}}$ $P_F(ax^2 + bx + c) = a P_F(x^2) + P_F(bx + c) = a\left(\frac{P_1(x)}{2\sqrt{3}} + \frac{P_0(x)}{3} \right)$
$+ bx + c$
$= (a+b)x + c - \frac{a}{6}$

$\underline{\text{V.4}}$ $\inf_{a,b} \int_0^1 |x^2 - ax - b|^2 dx = \| x^2 - P_F x^2 \|^2 = \frac{1}{180}$