Chapitre 3
Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1 Limites

Dans ce chapitre nous allons préciser les notions de limites et de continuité, en leurs donnant des définitions rigoureuses. Dans tout le chapitre I désigne un intervalle $\mathbb{R}$ tel que $I = (\alpha, \beta)$ (où (désigne indifféremment [ou]) et $\alpha \neq \beta$. De plus on notera $\mathring{I} =]\alpha, \beta[$ et $\overline{I} = [\alpha, \beta]$ (bien sûr si $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$ les crochets restent ouverts).

Enfin on dira qu'une propriété est vraie au voisinage de $a \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\}$, s'il existe un intervalle ouvert $I_2 =]a-\delta, a+\delta[$ (resp. $]c, \infty[$, $]\infty, c[$ où $c \in \mathbb{R}$), tel que la propriété soit vraie sur $I \cap sI_2$ si a est fini (resp $a = \infty$, $a = -\infty$).

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Soient f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, ℓ un réel et $a \in \overline{I}$, alors*

1. *On dit que f admet pour limite ℓ en a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

2. *Si I est de la forme $(\alpha, +\infty[$, on dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, (|x| \geq A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

3. *Si I est de la forme $]-\infty, \beta)$, on dit que f admet pour limite ℓ en $-\infty$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, (|x| \leq A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

Remarque 1.1. *Dans la définition le nombre η dépend de ε. Lorsque l'on veut montrer qu'une fonction admet ℓ pour limite en a, on se donne un réel $\varepsilon > 0$ et on cherche η qui convient.*

<u>Exemple</u>

La fonction $1/x$ admet 0 pour limite en $+\infty$. En effet, soit ε un nombre strictement positif, alors il existe un A (par exemple : $A = 1/(\varepsilon+1)$, tel que $x \geq A \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$.

Définition 1.2. *Soient f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{I}$, alors*

1. *On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A).$$

2. *Si I est de la forme $(\alpha, +\infty[$, on dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists A' \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad \big(|x| \geq A' \Longrightarrow f(x) \geq A\big).$$

3. *Si I est de la forme $]-\infty, \beta)$, on dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists A' \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad \big(|x| \leq A' \Longrightarrow f(x) \geq A\big).$$

Enfin on dit que f admet $-\infty$ pour limite en a (resp. $+\infty$, $-\infty$), si et seulement si $-f$ admet ∞ pour limite en a (resp. $+\infty$, $-\infty$)

Proposition 1.1 (Unicité de la limite)**.** *Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Supposons que f admette ℓ et ℓ' comme limite en a, alors :*

$$\ell = \ell'$$

Remarque 1.2. *La proposition précédente permet de parler de la limite de f en a, et justifie l'utilisation des symboles suivants :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \quad f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

On peut également traduire une limite de fonction à l'aide des suites, c'est l'objet de la proposition suivante

Proposition 1.2. *Soit f une fonction définie sur I. On a alors l'équivalence*

$$\left(f \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell\right) \Longleftrightarrow \left(\forall \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tel que } u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a, \quad f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell\right)$$

Proposition 1.3. *Soient f une fonction définie sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

On dit que f admet ℓ pour limite à gauche (resp. à droite) en a si et seulement si la restriction de f à $]-\infty, a[\cap I$ (resp. $I \cap]a, +\infty$) admet ℓ pour limite en a.

Remarque 1.3. *On notera*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell, \quad f \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$$

pour une limite à gauche et

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell, \quad f \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$$

pour une limite à droite.

Exemple

Les limites à droite et à gauche peuvent être différentes, par exemple si on calcule les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto |x|$, on trouve :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$$

1.2 Propriétés des limites

On peut obtenir la limite d'une fonction en utilisant les opérations algébriques suivantes :

Proposition 1.4. *Soient f et g deux fonctions admettant respectivement ℓ et ℓ' en a, alors :*
- *Si $(\ell, \ell') \neq (+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)$, la fonction $f+g$ admet $\ell+\ell'$ comme limite en a.*
- *λf où $\lambda \in \mathbb{R}$ admet λl en a.*
- *Si $(\ell, \ell') \neq (\pm\infty, 0), (0, \pm\infty)$, alors $f \cdot g$ admet $\ell \cdot \ell'$ comme limite en a.*
- *Si f ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut être en a), alors $1/f$ tends vers :*
  - *$1/\ell$ si ℓ est finie et $\ell \neq 0$..*
  - *0 si $\ell = \pm\infty$.*
  - *$\pm\infty$, si $\ell = 0$. Dans ce cas le signe de $\pm$ sera déterminer par le signe de f au voisinage de a, on pourra distinguer les valeurs inférieures à a et les valeurs supérieures à a.*
- *$|f|$ admet $|\ell|$ comme limite en a.*

Dans les propositions suivantes, on étudie le lien l'incidence du passage à la limite sur une inégalité.

Proposition 1.5. *Soient f et g deux fonctions définies sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$$

alors :
- *Si il existe un voisinage de a, V_a tel que pour tout $x \in V_a \setminus \{a\}$, on a $f(x) < g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.*
- *Inversement, si $\ell < \ell'$ il existe un voisinage de a, V_a tel que pour tout $x \in V_a$, $f(x) < g(x)$.*

Théorème 1.1 (Théorème d'encadrement ou des gendarmes)**.** *Soient f, g, h trois fonctions définies sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$$

et pour tout x dans un voisinage de a on a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Alors g admet ℓ pour limite en a.

Finissons par une proposition évoquant les fonctions monotones :

Proposition 1.6. *Si f est monotone sur $]a,b[$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors f possède une limite en a et en b égale à $\sup_{]a,b[} f$ et $\inf_{]a,b[} f \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (non respectivement).*

2 Continuité

2.1 Définitions

Nous allons donner une nouvelle définition de la continuité en un point.

Définition 2.1. *Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f* ***est continue*** *en a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)\,.$$

Si une fonction n'est pas continue en a on dira qu'elle est discontinue.

Cette définition de la continuité est en accord avec la définition que nous avions vu au premier chapitre, comme le montre la proposition suivantes :

Proposition 2.1. *Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Comme pour la limite on a une caractérisation séquentielle de la continuité :

Proposition 2.2. *Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si, pour toutes suites convergentes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$$

Définition 2.2. *Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est* ***continue en*** *a* ***à gauche*** *(resp.* ***à droite****) si*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a), \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \right).$$

Proposition 2.3. *Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.*

Définition 2.3. *Soient $a \in \mathring{I}$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ ademttant une limite finie l en a. Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :*

$$\tilde{f} : \quad \begin{cases} f(x) \text{ sur } I \setminus \{a\} \\ f(a) = l \end{cases}$$

est continue en a et s'appelle ***prolongement par continuité de f en*** *a.*

<u>Exemple</u>
On peut prolonger la fonction :

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow \frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

par continuité en 0 en prenant $\tilde{f}(0) = 1$.

On distingue deux types de discontinuité :

Définition 2.4. *Soient $a \in I$ et f une fonction définie sur I. On dira que f admet une discontinuité de première espèce en a si :*
- *f n'est pas continue en a.*
- *f admet une limite finie à gauche en a (si f est définie à gauche de a).*
- *f admet une limite finie à droite en a (si f est définie à droite de a).*

On dira que f admet une discontinuité de deuxième espèce si :
- *f n'est pas continue en a.*
- *La limite à gauche ou à droite de f en a est infini ou n'existe pas.*

Exemple

La fonction définie par

$$f : \begin{cases} x \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

admet une discontinuité de première espèce en 0.

La fonction définie par

$$f : \begin{cases} 1/x \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

admet une discontinuité de seconde espèce en 0.

Définition 2.5. *Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est* ***continue sur I*** *si et seulement si f est continue en tout point de I.*
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

2.2 Propriétés

Proposition 2.4 (Opérations sur les fonctions continues). *. Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, et deux réels α, β avec $\alpha > 0$, alors :*

$$f + g, \ \ f \cdot g, \ \ \lambda f, \ \ f^{\alpha}, \ \ f/g \text{ et } |f|$$

sont continues partout où elles sont définies. Soient $f : I_1 \longrightarrow I_2$ et $g : I_2 \longrightarrow I_3$ continues, alors $g \circ f$ est continue sur I_1.

Théorème 2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(a, b) \in I^2$ tel que $f(a) \leq f(b)$. Alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est à dire :*

$$\forall \alpha \in [f(a), f(b)], \exists c \in I, \quad f(c) = \alpha$$

.

Théorème 2.2. *Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Corollaire 2.1. *Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f([a,b])$ est un segment de $\mathbb{R}$ (de la forme $[c,d]$).*

Proposition 2.5. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue.*

Démonstration. □

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, en considérant la fonction $\tilde{f}$

$$\begin{aligned} \tilde{f} :& I \longrightarrow f(I) \\ & x \longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

on restreint f à son image, de sorte que $\tilde{f}$ soit surjective. Dans la suite nous notons f à la place de $\tilde{f}$. Ainsi f est une fonction surjective.

Définition 2.6. *Avec les notations précédentes, si f est bijective alors il existe une fonction f^{-1} appelée fonction réciproque de f :*

$$\begin{aligned} f^{-1} :& f(I) \longrightarrow I \\ & y \longrightarrow f^{-1}(y) \end{aligned}$$

définie par les relations

$$\forall x \in I, \quad f^{-1} \circ f(x) = x.$$

$$\forall x \in f(I), \quad f \circ f^{-1}(x) = x.$$

Exemple
La fonction $\log(x)$ est la fonction réciproque de la fonction e^x.

Théorème 2.3. *Avec les notations précédentes, si f est continue et strictement monotone alors on a :*
- *$f(I)$ est un intervalle.*
- *f est bijective.*
- *f^{-1} est strictement monotone de même sens que f.*
- *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Démonstration. □

2.3 Continuité uniforme