CPP 1 ère année- Mathématiques
13 Décembre 2011

Devoir surveillé - Algèbre Générale

Durée 1h30. Documents et calculatrice interdits.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

1. Soient P et Q deux parties de F. Montrer que l'on a l'égalité,

$$f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q).$$

On montre l'égalité d'ensemble par double inclusion.

– *Montrons que* $f^{-1}(P \cap Q) \subset f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$. *Soit* $x \in f^{-1}(P \cap Q)$, *on a alors,*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(P \cap Q) &\Longrightarrow \exists y \in P \cap Q \,|\, f(x) = y. \\ &\Longrightarrow (\exists y \in P \,|\, f(x) = y) \text{ et } (\exists y \in Q \,|\, f(x) = y) \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(P) \text{ et } x \in f^{-1}(Q) \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q). \end{aligned}$$

– *Réciproquement montrons que* $f^{-1}(P \cap Q) \supset f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$. *Soit* $x \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$, *on a alors,*

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q) &\Longrightarrow \exists y \in P \,|\, f(x) = y \text{ et } \exists y \in Q \,|\, f(x) = y. \\ &\Longrightarrow \exists y \in P \cap Q \,|\, f(x) = y. \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(P \cap Q) \end{aligned}$$

2. Soient A et B deux parties de E, montrer que

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Soit $y \in f(A \cap B)$, *on a alors,*

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longrightarrow \exists x A \cap B \,|\, y = f(x). \\ &\Longrightarrow (\exists x \in A \,|\, y = f(x)) \text{ et } (\exists x \in B \,|\, y = f(x)) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B). \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

3. *Après avoir rappelé la définition de l'injectivité, montrer que dans le cas où f est injective, on a :*

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

On dit que f est ***injective*** *si $\forall y \in F$, il existe au plus un antécédent de y par f, on a alors l'équivalence suivante : f est injective $\Longleftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, on a alors :*

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B). \\ &\Longrightarrow (\exists x_1 \in A \,|\, y = f(x_1)) \text{ et } (\exists x_2 \in B \,|\, y = f(x_2)) \end{aligned}$$

Mais alors on a $f(x_1) = y = f(x_2)$ et par injectivité de f on obtient $x_1 = x_2 \in A \cap B$ d'où $y \in f(A \cap B)$. On a donc

$$f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B).$$

Comme l'autre inclusion a été traitée dans le cas général à la question précédente, on a bien égalité des ensembles.

4. Dans cette question on prend $E = F = \mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = x^2$.
   (a) La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

> *La fonction f n'est pas injective puisque $f(-1) = 1 = f(1)$. f n'est pas surjective car $Im(f) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}$. Ainsi f n'est pas bijective.*

   (b) Trouver deux parties A et B telles que :

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

> *Prenons par exemple $A = [-2, -1]$ et $B = [0, 2]$, de sorte que $f(A) = [1, 4]$ et $f(B) = [0, 4]$ d'où $f(A) \cap f(B) = [1, 4]$. Or $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.*

Exercice 2. [5 pts] Soit $E = \mathbb{R}^2$, on définit sur E la relation :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff \exists k \in \mathbb{R}^* \mid (x, y) = k \cdot (x', y')$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'équivalence.

> *On vérifie les trois axiomes des relations d'équivalence :*
> – *Réflexivité : Soit $(x, y) \in E$ alors $(x, y) = 1 \cdot (x, y)$ de sorte que $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$*
> – *Symétrie : Soient $(x, y), (x', y') \in E$ tel que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ alors :*
>
> $$\exists k \in \mathbb{R}^* \mid (x, y) = k \cdot (x', y') \iff \exists k \in \mathbb{R}^* \mid (x, y) = \frac{1}{k} \cdot (x', y') \iff (x', y')\mathcal{R}(x, y)$$
>
> car $k \neq 0$.
> – *Transitivité : Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in E$ tel que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$ alors ils existenet $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*$ tels que*
>
> $$(x, y) = k_1(x', y'), \text{ et } (x', y') = k_2(x'', y'')$$
>
> *Ainsi $(x, y) = k_1k_2(x'', y'')$ et $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.*

2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 c'est-à-dire

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in E, \text{ tel que } x^2 + y^2 = 1\}$$

Montrer que $\forall v = (x, y) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, il existe deux points $u = (x', y')$ et $w = (x'', y'')$ de $\mathcal{C}$ tels que

$$w, u \in \overline{v} \quad et \quad y' \geq 0,\ y'' \leq 0$$

> *Soit $v = (x, y) \in E \setminus \{(0, 0)$, sans perdre de généralité on peut supposer $y \geq 0$, (sinon on remplace v par $-v \in \overline{v}$) alors $x^2 + y^2 \neq 0$ de sorte que*
>
> $$(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$
>
> *De sorte que $u = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \in \overline{v}$ et*
>
> $$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$
>
> *Donc $u \in \mathcal{C}$, de même on montre que $v = (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \in \overline{v} \cap \mathcal{C}$*

3. En déduire $E \setminus \{(0, 0)\}/\mathcal{R}$

Il s'agit de choisir un représentant de chaque classe d'équivalence. On a vu dans la question 2. que chaque classe d'équivalence à un unique représentant dans $\mathcal{C}$ tel que $y \geq 0$, sauf la classe de $(1,0)$ qui a deux représentants $(1,0)$ et $(-1,0)$. Posons donc $\mathcal{C}^+ = (\mathcal{C} \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)) \setminus \{(-1,0)\}$ le demi cercle supérieur privé du point $(-1,0)$. Montrons que $E \setminus \{(0,0)\}/\mathcal{R} = \mathcal{C}^+$. Soit $\overline{v} \in E \setminus \{(0,0)\}/\mathcal{R}$ alors d'après la question 2. il existe $(x,y) \in \mathcal{C}^+ \cap \overline{v}$. Inversement chaque élément de $\mathcal{C}^+$ est représentant de sa propre classe d'éauivalence. On conclut l'égalité par double inclusion.

Exercice 3. [5 pts] Soit $(G, \times)$ un groupe de neutre e tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$ (où $x^2 = x \times x$, par ailleurs on pourra noté xy pour $x \times y$).

1. Rappeler la définition d'un groupe, puis la définition d'un groupe abélien.

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\times$. On dit que $(G, \times)$ est un ***groupe*** *si et seulement si :*
– $\times$ est associative : $\forall (x,y,z) \in G^3, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
– $\times$ possède un élément neutre $e \in G$: $\forall x \in G, x \times e = e \times x = x$.
– Tout élément de G possède un symétrique : $\forall x \in G, \exists y \in G$ tel que $x \times y = y \times x = e$.
Si de plus $\times$ est commutative, c'est-à-dire si $\forall (x,y) \in G^2, x \times y = y \times x$, G est appelé ***groupe commutatif*** *ou* ***groupe abélien****.*

2. $\forall x \in G$ calculer x^{-1}.

Soit $x \in G$, comme $x^2 = e$ on a
$$x \times x = e$$
Ainsi par unicité de l'inverse on a $\forall x \in G$, $x^{-1} = x$.

3. Soient $(x,y) \in G^2$ développer $(xy)^2$.

Soient $(x,y) \in G^2$, on a alors
$$(xy)^2 = xyxy$$

4. En déduire que G est abélien.

Soient $(x,y) \in G^2$, on a alors
$$e = (xy)^2 = xyxy \iff y^{-1} = xyx \iff y^{-1}x^{-1} = xy \iff yx = xy$$
Ainsi G est abélien

Exercice 4. [5 pts]

1. Exhiber tous les éléments de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$.

On sait (cours) que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sont caractérisés par :
$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \text{ tel que } \operatorname{pgcd}(a, 12) = 1\}$$
Ainsi $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{1, 5, 7, 11\}$

2. Après avoir rappeler la définition de l'ordre d'un élément calculer l'ordre de chaque élément du groupe $G = ((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times, \times)$.

Soit $(G, \times)$ un groupe de neutre e et $x \in G$, l'ordre de x et le plus petit entier n vérifiant
$$x^n = e$$
Dans notre cas on a évidemment $ord(1) = 1$ et on vérifie facilement que dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
$$5 \neq 1, \quad 5^2 = 1, \qquad 7 \neq 1, \quad 7^2 = 1, \qquad 11 \neq 1, \quad 11^2 = 1.$$
De sorte que $ord(5) = ord(7) = ord(11) = 2$.

3. Dans cette question on montre qu'il n'existe pas d'isomorphisme de groupe entre $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times, \times)$. Supposons qu'un tel isomorphisme ϕ existe. (a) Que dois vérifier un morphisme ϕ de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times, \times)$. Même question pour un isomorphisme ?

> *Un morphisme ϕ de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times, \times)$ doit vérifier :*
>
> $$\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2, \qquad \phi(a+b) = \phi(a) \times \phi(b).$$
>
> *Un isomorphisme est un morphisme bijectif.*

(b) Calculer $\phi(0)$. Quelles sont les possibilités pour $\phi(1)$. Dans chaque cas calculer $\phi(2)$ et aboutir à une contradiction.

> *D'après le cours on a $\phi(0) = 1$ (Un morphisme de groupe $\phi : G \mapsto G'$ de neutre respectif e et e' vérifie $\phi(e) = e'$).*
> *Comme on suppose ϕ bijectif on a $\phi(1) \neq \phi(0) = 1$. Ainsi $\phi(1) \in \{5, 7, 11\}$.*
> *Si $\phi(1) = 5$, alors $\phi(2) = \phi(1+1) = \phi(1)\phi(1) = 5 \times 5 = 1$ ce qui contredit l'injectivité de ϕ ($\phi(2) = \phi(0)$).*
> *De même si $\phi(1) = 7, 11$ on trouve $\phi(2) = 1$. Ainsi un tel isomorphisme n'existe pas.*