CPP 1 ère année- Mathématiques
À rendre le 4 Novembre 2011

Devoir Maison

Profiter de ce devoir pour vous entrainer à rédiger correctement vos réponses

Problème **Fonction Lipschitzienne**

Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a alors la définition suivante :
f est **k-lipschitzienne** si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$$

où k est un réel strictement positif.

On dit que f est **lipschitzienne** si il existe k tel que f est $k-lipshcitzienne$.

1. (a) Soit $A > 0$ montrer que la fonction définie sur $I = [A, +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{A}}$-lipschitzienne.
   (b) Soit $a < b$ deux réels, montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est k-lipschitzienne sur tout $I = [a, b]$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit f_1 et f_2 deux fonctions lipschitziennes, montrer que $f_1 + f_2$ est lipschitziennes. Le produit $f_1 f_2$ est il une fonction lipschitzienne ?
   (d) Soit f et g deux fonctions k(resp k')-lipschitziennes sur I_1 et I_2 telles que $f(I_1) \subset I_2$, montrer $g \circ f$ est lipschitzienne.
2. Soit f une fonction lipschitzienne sur I, montrer que f est uniformément continue.
3. Étudier la réciproque de la question précédente.
4. Soient $a < b$ deux nombres réels et f une fonction de classe $\mathcal{C}_1$ sur $I = [a, b]$, montrer que f est *lipschitzienne*. (Indication : On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).
5. Soit $a < b$ deux réels, $I = [a, b]$, et f une fonction k-lipschitzienne sur I tel que $f(I) \subset I$.
   (a) Montrer que f admet un point fixe sur I.
   (b) Si $k < 1$ on dit que f est **contractante**. Montrer que si f est contractante f admet un unique point fixe. À-t-on unicité du point fixe si f est $1-$lipschitzienne ?
   (c) Soit f une fonction contratante sur I, on suppose de plus que $0 \in I$, $f(0) = 0$.
      i. Montrer que la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
      ii. Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.