CPP – Mathématiques
2011-2012

Feuille 1 : Révision et Compléments.

1 Fonction

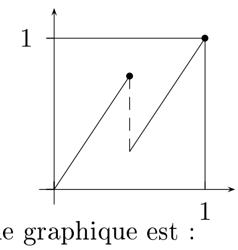
Exercice 1. Trouver l'ensemble de définition et étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sqrt{2x^2+3}$.
2. $f_2(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$.
3. $f_3 = 1 - \dfrac{1}{x}$.

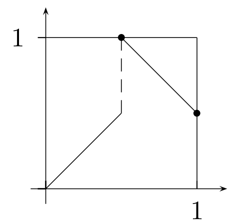
Exercice 2. Dire si les fonctions suivantes sont continues, injectives, surjectives ou bijectives ?

1.
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \mapsto & [0,\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

2. La fonction $g : [0,1] \mapsto [0,1]$ dont le graphique est :



3. La fonction $h : [0,1] \mapsto [0,1]$ dont le graphique est :



Exercice 3. Soit f et g définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on suppose de plus que f et g sont paires ou impaires. Que dire de fg ?

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur I_1, et g une fonction définie sur I_2. On suppose que $g(I_2) \subseteq I_1$ de sorte que la fonction $f \circ g$ soit définie sur I_1. On suppose de plus que I_2 est centré en zéro. Étudier la parité de $f \circ g$ en fonction de celle de f et g.

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe au moins un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 6. On rappelle que la partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier n inférieur à x. Par exemple $\lfloor 1.2 \rfloor = 1$. La partie entière d'un nombre vérifie $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \quad \begin{cases} 1 - x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{\times}$, montrer que
$$|f(x)| < |x|.$$
2. Étudier la continuité de f en zéro.
3. soit x_0 un réel non nul, étudier la continuité de f en x_0.

2 Dérivées et primitives

Exercice 7. Déterminer la dérivée des fonctions f suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 6x + 5}{x^2 + 1}$
2. $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 3}$.
3. $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$.
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.
5. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}$

Exercice 8. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x + 1) \log |x - 3|$$

Soit $\mathcal{C}$ le graphe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

1. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. (a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f'.
   (c) Montrer que f' s'annule en un seul point sur $]-\infty, 3[$.
   (d) En déduire le tableau de variation de f.
3. Étudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$. Préciser les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}$.
4. Représenter $\mathcal{C}$.

Exercice 9. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$$

Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 11. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en a. Calculer :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$$

Exercice 12. Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ et continue en 0 telle que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \lambda.$$

Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

Exercice 13. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer les assertions suivantes :

1. Si f est paire alors f' est impaire.
2. Si f est impaire alors f' est paire.
3. Si f est T-périodique alors f' est T-périodique. Que dire des réciproques.

Exercice 14. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur $]0, \infty[$ tel que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

On suppose que quelque soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$ on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \, g\left(|x - y|\right)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 15. Trouver toutes les applications f vérifiant les conditions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2. $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $]-1, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in]-1; 1[^2$ on ait :

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right).$$

Exercice 16. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \leq -5\pi/2 \\ f(x) = \sin x + 1 \text{ si } -5\pi/2 < x \leq 0 \\ f(x) = e^x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et $x \in [0, \infty[$ on a :

$$x^{n+1} - (n + 1)x + n \geq 0.$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-3}^{3} \left(12t^7 + 2t^3 - t\right) dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} dx,$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin^5(x)\cos(x) dx, \quad I_4 = \int_{3\pi}^{5\pi} \sin(x)\cos^5(x) dx$$

Exercice 19. Dans cet exercice on cherche à calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)} dx.$$

1. Calculer I.
2. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi/4]$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$. Calculer $f'(x)$ et en déduire une relation entre I et J.
3. Calculer J.

Exercice 20. Soit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

   Calculer f'.
2. Calculer I.

Exercice 21. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{1}{2}\}$ par

$$f(x) = -\frac{8x^2 + 32x + 2}{\left(4x^2 - 1\right)^2}.$$

1. Montrer qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que :

$$f(x) = \frac{a}{\left(2x+1\right)^2} + \frac{b}{\left(2x-1\right)^2}$$

   et les déterminer.
2. En déduire

$$\int_1^2 f(t) dt.$$

Exercice 22. Soit n un entier relatif, $n \neq -1$ et $x \geq 1$.

1. Calculer l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_1^x t^n lnt dt$$

   .
2. En déduire

$$I_n = \int_1^x t^n \left(lnt\right)^2 dt$$

   .

3 Trigonométrie

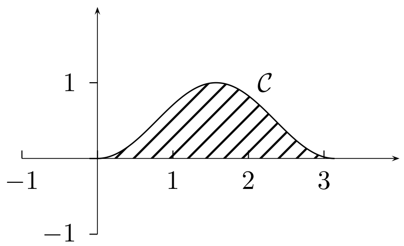
Exercice 23. Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\sin(x) + \sin(nx) + \sin((2n-1)x)}{\cos(x) + \cos(nx) + \cos((2n-1)x)}, \qquad B = \Pi_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Exercice 24. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2(2x) - \cos^2(x)\right) dx$$

Exercice 25. Le plan est rapporté à un système orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, avec comme unité graphique 1 cm. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin^2(x)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On considère d'autre part le domaine D hachuré ci dessous :



1. Déterminer l'aire du domaine D en cm^2.
2. Calculer
$$\int_0^{\pi} \sin^4(x)dx.$$

4 Nombres complexes

Exercice 26. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}, \qquad z_2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2, \qquad z_3 = i + \frac{1}{i}.$$

Exercice 27. Soit $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$, $\quad z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$ trois nombres complexes. On pose $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique puis exponentielle.
2. En déduire la forme exponentielle de Z, puis sa forme algébrique.

Exercice 28. Calculer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)^{11}, \quad z_2 = (-1-i)^{15}.$$

Exercice 29. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $1 + zz' \neq 0$. Montrer que

$$Z = \frac{z + z'}{1 + zz'}$$

est réel.

Exercice 30. Linéariser l'expression $A = \cos^2(x) \sin^3(x)$.

Exercice 31. Soit $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \qquad z_2 = 1 - i$ et $z_3 = z_1/z_2$.

1. Mettre z_3 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2.
3. Écrire z_3 sous forme trigonométrique. En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 32. Résoudre l'équation $z^3 - 5z^2 + 20z - 16$.

Exercice 33. Calculer les racines carrés complexes de $2 - i$.

Exercice 34. L'objectif de cet exercice est de montrer l'inégalité triangulaire. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, on souhaite montrer que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

1. Soit z un nombre complexe, montrer que $|Re(z)| \leq |z|$.
2. Calculer $|z_1 + z_2|^2$ en fonction de $|z_1|$, $|z_2|$ et $Re(z_1\bar{z_2})$.
3. Conclure.
4. Montrer que $|z_1| - |z_2| \leq |z_2 - z_1|$.
5. En déduire que $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Exercice 35. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Soit $x \in \mathbb{R}$ on suppose alors que $f(x) = x$. Soient (z, z') deux nombres complexes on suppose alors

$$f(z + z') = f(z) + f(z'), \qquad f(zz') = f(z)f(z').$$

Montrer que f est soit l'identité sur $\mathbb{C}$ soit la conjugaison complexe.

5 Équations différentielles

Exercice 36. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - (2x + 1)y = 0$.
2. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}y = 0$
3. $y' - \dfrac{x}{x^2 + 1}y = 0$
4. $y' + ay = b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$.

Exercice 37. On considère l'équation différentielle

$$y' + 2y = 3e^{-3x} \tag{1}$$

1. Chercher une solution de (1) sous la forme $g_a(x) = ae^{-3x}$.
2. Résoudre l'équation homogène associé à (1).
3. Résoudre (1) et trouver la solution s'annulant en 0.

Exercice 38. Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre. Soit y_1 et y_2 deux solutions de (E).

1. Montrer que $y_1 + y_2$ solution de (E).
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que λy_1 solution de (E).

Exercice 39. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 2y = xe^x$.
2. $y'' + y' + y = e^{-x} + e^{3x}$.

Exercice 40. Trouver la solution $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de

$$y'' - y' - 6y = 6e^{4x} - 6e^x$$

telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 41. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y = \sin(x).$$

Exercice 42. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$f(x) + f(-x) = xe^x.$$

Exercice 43. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$f''(x) + f(-x) = x.$$

On pourra introduire la fonction $g(x) = f(-x)$, et chercher deux équations différentielles vérifiées par $f + g$ et $f - g$.

6 Base de logique

Exercice 44. Exprimer les phrases suivantes à l'aide de propositions reliées par des connecteurs logiques :

1. "Si le papier devient rouge, la solution est acide."
2. "Le papier devient rouge si la solution est acide."
3. "Vous aurez une chambre à condition que vous n'ayez pas de chien." Quelle est la négation logique de cette proposition ?
4. "S'il y a du cobalt mais pas de nickel dans la solution, le papier deviendra brun". Quelle est la négation logique de cette proposition ?

Exercice 45. On suppose que l'énoncé suivant est vrai : "S'il pleut le matin, je prends mon parapluie". Les argumentations ci-dessous sont-elles correctes ?

1. "J'ai pris mon parapluie, donc il a plu ce matin".
2. "Je n'ai pas pris mon parapluie, donc il ne pleuvait pas ce matin".
3. "Il a fait beau, donc je n'ai pas pris mon parapluie".

Exercice 46. Soit F l'ensemble des Français. On note, pour un élément x de F,

$$P(x),\ \text{la propriété " x est brun "},$$

$$Q(x),\ \text{la propriété " x est grand "}.$$

Répondre aux questions suivantes :

1. Sous la forme d'un schéma, représenter dans F l'ensemble des éléments de F pour lesquels P(x) est vraie, puis l'ensemble des éléments de F pour lesquels Q(x) est vraie.
2. Considérerons les propositions suivantes :

   $$(\forall x \in F)\,((P(x) \text{ ou } Q(x))$$

   et

   $$(\forall x \in F, P(x)) \text{ ou } (\forall x \in F, Q(x))$$

   Dire si ces deux propositions sont vraies ou fausses dans notre cas de figure. Représenter dans F comment on verrait le fait que ces propositions soient vraies. Sont-elles équivalentes ? Rechercher éventuellement les relations logiques qui les lient.

Exercice 47. Écrire les négations logiques des propositions suivantes :

1. " Tous les hommes sont mortels. "
2. " Tout intervalle de R contient un élément de l'intervalle $[0, 1]$."
3. $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}, p \leq n$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x2 < 1$.

Exercice 48. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. A quelle(s) proposition(s) ci-dessous correspond l'assertion "$A \subset B$" ?

1. $\forall x \in A, x \in B$.
2. $\forall x \in E, (x \in B \Rightarrow x \in A)$.
3. $\forall y \in E, (y \in A \Rightarrow y \in B)$.
4. $(\forall x \in E, x \in A) \Rightarrow (\forall x \in E, x \in B)$.

Exercice 49. Démontrer la propriété suivante par l'absurde :

"Tout entier de carré impair est impair".

Exercice 50. Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'implication suivante :

" Si n^2 est impair, alors n est impair."

A-t-on démontré l'implication ?

Exercice 51. Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$:

"Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair".

1. Écrire la propriété ci-dessus sous la forme d'une formule mathématique.
2. Écrire la contraposée de la formule donnée à la question 1).
3. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in 1, 3$ (à justifier), prouver que la formule de la question 2) est vraie.
4. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 52. Soient P_n la propriété "9 divise $10^n - 1$" et Q_n la propriété "9 divise $10^n + 1$", où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. A-t-on "$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$" ?"$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n$" ?