CPP – Mathématiques
2011-2012

Feuille 2 : Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 1. Montrer en utilisant des quantificateurs que :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0$$

Exercice 2. Quelle est la limite ℓ en $+\infty$ de la fonction suivante :

$$\frac{x}{x+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, déterminer A tel que

$$x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor, \quad \lim_{x\longrightarrow 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,$$

où $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^\times\right)^2$.

Exercice 4. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(x \log x)}{x}$$

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos \mathrm{e}^x}{x^2+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\sin x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$.

5. $\lim_{x \longrightarrow 0} (\log(1+x))^{\frac{1}{\log x}}$

Exercice 6. Montrer que toute fonction f périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Exercice 7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ croissante telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice 8. Montrer que la fonction $\cos \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 9. Soit f une fonction définie sur $[-1;1]$ telle que :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$$

Montrer que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^\times \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comparer les limites suivantes

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right), \quad \lim_{h \longrightarrow 0} \left(\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right).$$

Exercice 11. Soient $a < b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
Montrer que l'application $x \mapsto \lim_{x^+} f(t)$ est croissante.

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on suppose que g est périodique, que f tend vers 0 en $+\infty$ et $f+g$ est croissante. Montrer que g est constante.

Exercice 13. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$, on suppose que f admet une limite finie en a. Montrer que f est bornée dans un voisinage de a.

Exercice 14. Montrer à l'aide des quantificateurs que la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue en 1.

Exercice 15. Soient f et g deux fonctions continues en 1, montrer que $f+g$ est continue en 1.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, \infty[$ tel que $\forall x \in]x-\alpha, x+\alpha[, \quad f(x) \neq 0$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer q'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 18. Soit f une fonction croissante définie sur $[a, b]$, qui prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Montrer que f est continue.

Exercice 19. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \inf\{|x-t|, t \in]0;1]\}$.
1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que pour tous $(x, y) \in R^2$, on a $|f(x) - f(y)| < |x-y|$.
3. En déduire que f est continue sur R.
4. Déterminer l'expression de f sur chacun des intervalles : $]-\infty; 0];]0; 1];]1; +\infty]$.

Exercice 20. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$f : \quad \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point. Que dire de la fonction $f \circ f$.

Exercice 21. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \quad \begin{cases} x-1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $g(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$$

Montrer que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

Exercice 23. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. L'image par f d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par f d'un segment est un segment.
3. L'image par f d'une partie bornée est bornée.

Exercice 24.

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, g, h deux fonctions continue sur I telles que :
$$\forall x \in I, \quad (g(x))^2 = (h(x))^2 \neq 0$$
Montrer que $g = h$ ou $g = -h$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(|x|) = |f(x)| > 0$$
Montrer que f est paire.

Exercice 25. Soient f et g définies et continues sur I, montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur I.

Exercice 26. Soit f une application continue et injective sur un intervalle I. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 27. Soit f une application continue sur I. Montrer que l'image par f d'un intervalle compris dans I est un intervalle.

Exercice 28. Soit $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose de plus qu'il existe $n \geq 2$, tel que $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f(x) = x, \quad \forall x \in [0, 1]$. Montrer que f est injective, puis strictement croissante, enfin caractériser f.

Exercice 29.

Soient a un réel strictement positif et f continue telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geq a\,|x - y|\,.$$
Montrer que f est bijective

Exercice 30. Soit $f, g : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ continue telles que $f \circ g = g \circ f$. On souhaite montrer qu'il $\exists x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

1. On suppose que la fonction $f - g$ ne s'annule pas. Montrer que l'on peut supposer que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) - g(x) \geq m$, où m est un réel strictement positif.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\forall x \in [0, 1]$, $f^n(x) - g^n(x) \geq nm$, où $f^n = f \circ f \circ f \ldots f$.
3. Conclure.

Exercice 31. On considère la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x \sin x}$.

1. Montrer que f est continue sur I puis qu'elle établit une bijection de I sur l'intervalle $J = \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right[$.
2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Est-elle continue ? Calculer $f^{-1}(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 32. Montrer que la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

est bijective. Expliciter $f^{-1}(y)$.

Exercice 33. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 + 2x + 4}$.

1. Montrer que f est continue, puis que f est bijective sur un ensemble que l'on déterminera.
2. Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(1/2)$.

Exercice 34. Peut-on construire un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\times$.

Exercice 35. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x - 1$. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa réciproque. Résoudre l'équation

$$f^{-1}(x) = f(x).$$

On pourra utiliser (après l'avoir justifié) l'équivalence suivante : $f \circ f(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = x$.

Exercice 36. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}\,(3 - \sqrt{x})$ est-elle uniformément continue ?

Exercice 37. Soient A un réel non nul et f une fonction uniformément continue sur chacun des intervalles suivants $]-\infty, -A]$, $[-A, A]$ et $[A, +\infty[$. Montrer qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe des constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |f(t)| \leq a \cdot |t| + b.$$

Exercice 39. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que f est uniformément continue, bijective et f^{-1} n'est pas uniformément continue.