

Feuille d'exercices 4

PGCD - PPCM - Théorème de Bezout

Exercice 1.

Si $a = 462$ et $b = 104$ calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$, puis $\text{ppcm}(a, b)$. Déterminer un couple d'entiers (u, v) tels que $au + bv = d$.

Exercice 2.

1. Trouver deux entiers tels que $29u + 24v = 1$.
2. Déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $29u + 24v = 3$.
3. Si x, y sont deux entiers tels que $29x + 24y = 3$, que peut-on dire de x et de y ?
4. Si x, y sont deux entiers tels que $29x + 24y = 5$, que peut-on dire de x et de y ?

Exercice 3.

La date de naissance d'Alice est telle que le jour multiplié par 12 ajouté au mois multiplié par 31 fait 442. Déterminez la.

Exercice 4.

Quel est le cardinal de l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 2x + 3y = n\},$$

pour un $n \in \mathbb{N}$ donné ?

Exercice 5.

Calculer les pgcd suivants : $\text{pgcd}(46848, 2379)$, $\text{pgcd}(13860, 4488)$ et $\text{pgcd}(30076, 12669, 21733)$.

Exercice 6.

Quel est le plus petit entier strictement positif multiple de $1, 2, \dots, 10$?

Exercice 7.

Calculer le $\text{pgcd}(357, 629)$ puis $d = \text{pgcd}(357, 629, 221)$. Trouver des entiers x, y et z tels que $357x + 629y + 221z = d$.

Exercice 8.

Soit a, b et c des entiers. On suppose que a divise bc et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer en utilisant une relation de Bezout que a divise c .

Exercice 9.

Soit a un nombre rationnel tel que $18a$ et $25a$ sont des nombres entiers. Montrez que a est aussi entier.

Exercice 10.

1. Montrer que 15 et 28 sont premiers entre-eux.
2. Trouver une solution particulière de l'équation $28x - 15y = 1$. En déduire une solution de

$$28x - 15y = 11.$$

3. Calculer le pgcd de 15 et 21. L'équation $15x - 21y = 3$ admet-elle des solutions dans \mathbb{Z}^2 ?

4. Même question pour l'équation $15x - 21y = 5$?

Exercice 11.

Trouvez tous les entiers p et q tels que $4p + 7q = pq$.

Exercice 12.

1.a. Montrer que pour tout entier naturel n , $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $(n + 3)$.

1.b. Montrer que pour tout entier naturel n , $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Soient a, b et c des entiers naturels non nuls, montrer que

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(bc - a, b).$$

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\text{pgcd}(3n^3 - 11n, n + 3) = \text{pgcd}(48, n + 3).$$

4.a. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 48.

4.b. En déduire l'ensemble des entiers naturels tels que

$$\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$$

soit un entier naturel.