

Feuille d'exercices 5

Inverse modulo n - Fonction indicatrice d'Euler

Exercice 1.

Déterminer les éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$, et calculer les inverses.

Exercice 2.

1. Calculer l'inverse de 111 modulo 200.
2. Calculer l'inverse de 24 modulo 55.
3. Calculer l'inverse de 5^{16} modulo 19.

Exercice 3.

Trouver les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes :

- a) $10x = 14 \pmod{15}$;
- b) $10x = 14 \pmod{18}$;
- c) $10x = 14 \pmod{21}$.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

Exercice 6.

Soit ϕ la fonction indicatrice d'Euler.

- 1) Déterminer $\phi(n)$ pour n compris entre 1 et 10.
- 2) Déterminer $\phi(5^2)$, en déduire $\phi(100)$.
- 3) Déterminer tous les entiers b tels que $1 < b < \phi(100)$ et $\text{pgcd}(b, \phi(100)) = 1$.

Exercice 7.

Montrer que le carré d'un nombre entier est de l'une des formes : $5k$, $5k + 1$ ou $5k - 1$.