

Feuille 1 : Cryptographie, Arithmétique

Exercice 1. Cryptographie hybride

Alice et Bob veulent communiquer ensemble, de façon bidirectionnelle. Bob dispose d'une clef publique K_{pub} et d'une clef privée K_{priv} pour un système de chiffrement asymétrique. On suppose qu'Oscar peut intercepter tous les messages échangés par Alice et Bob.

1. Rappeler comment Alice peut envoyer un message m à Bob sans que l'adversaire Oscar ne connaisse le message m . Quel est le concept atteint ? Quels sont les inconvénients de cette solution ?
2. Que faudrait il faire pour que Bob envoie des messages à Alice non connus d'Oscar ? Combien de clefs sont nécessaires pour que la communication se fasse dans les deux sens ?
3. Alice et Bob souhaitent utiliser un système hybride pour le chiffrement (c'est à dire qui utilise à la fois le système de chiffrement asymétrique mais également un système symétrique). Montrer comment Alice et Bob peuvent communiquer de manière sûre dans les deux sens. Quelles sont les avantages de cette solution ?
4. On suppose maintenant qu'Oscar est capable de modifier les messages échangés par Alice et Bob. De plus, Oscar a réussi à intercepter la clef K_{pub} de Bob avant qu'Alice ne la connaisse. Montrer comment Oscar peut briser la confidentialité du système hybride de la question précédente sans qu'Alice et Bob ne s'en rendent compte. Comment pourrait on éviter cette attaque ?

Exercice 2. La recherche exhaustive

Alice et Bob utilisent un système de chiffrement symétrique pour communiquer entre eux. Ce système de chiffrement permet d'utiliser des clefs de 64 bits, 128 bits ou de 256 bits. Alice et Bob se servent d'une clef secrète de 64 bits. Oscar dispose d'un message clair m et du chiffré c de m par ce système de chiffrement. On suppose qu'Oscar utilise un ordinateur capable d'exécuter l'algorithme de chiffrement 2^{40} fois par seconde.

1. Décrire une méthode permettant à Oscar de retrouver la clef secrète utilisée par Alice et Bob. Combien de temps lui faut il ?
2. Alice et Bob avertis de cette attaque décident d'utiliser une clef de 128 bis. Qu'en pensez vous ?

Exercice 3. Chiffrement parfait

Un système de chiffrement est dit parfait si la connaissance d'un message chiffré n'apporte aucune information sur le message clair même à un adversaire ayant des ressources calculatoires illimitées.

On considère le système de chiffrement symétrique suivant : pour échanger un message $m \in \{0, 1, 2\}$, Alice et Bob se rencontrent et décident d'une clé aléatoire $k \in \{0, 1, 2\}$ partagée. L'opération de chiffrement consiste à représenter k et m en base 2 avec 2 bits et à effectuer le « XOR » des deux représentations.

1. Quel est l'algorithme de déchiffrement ?
2. Faire un tableau de tous les chiffrés possibles. Ce système de chiffrement est-il parfait ?

Un carré latin d'ordre 3 est un tableau de nombres possédant 3 lignes et 3 colonnes. Les éléments de ce tableau appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ et sont tels que chaque nombre de cet ensemble n'apparaît qu'une seule fois sur chaque ligne et chaque colonne. On note $l_{i,j}$ l'élément situé en ligne i et colonne j . On modifie le système de chiffrement de la manière suivante : le chiffré du message $m \in \{0, 1, 2\}$ avec la clef $k \in \{0, 1, 2\}$ est l'élément l_{km} .

3. Donner un exemple de tel carré latin.
4. Quel est l'algorithme de déchiffrement ? Le système de chiffrement est-il parfait ?

Exercice 4. Chiffrement de Hill

Soit $K \in Gl_n(A)$, on définit

$$e_K : A^n \rightarrow A^n \\ x \mapsto xK$$

1. Montrez qu'on définit ainsi un système de chiffrement symétrique dont on précisera les données $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$.
2. Exemple numérique : «YIFZMA» est un texte chiffré par un chiffrement de Hill avec $n = 2$ et $A = \mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, de matrice $K = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Retrouvez le clair.
3. Eve a volé la machine à chiffrer de Bob, qui utilise un chiffrement de Hill avec une matrice 2×2 sur $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. Elle tente une attaque à texte choisi : le texte clair «ba» est chiffré en «HC» et le texte clair «zz» est chiffré en «GT». Quelle est la clé ? Quelle est la clé de déchiffrement ? Que pensez-vous des choix de Eve ?