CONTRE-EXEMPLE À LA CONJECTURE DE LA SECTION PRO-p (D'APRÈS YUICHIRO HOSHI)

ANNA CADORET

Cet exposé est un compte-rendu de l'article de Hoshi [H10]. A certains endroits, j'ai un peu simplifié l'argument quitte à modifier légèrement les énoncés des théorème 2.2 et lemme 3.2. Cela permet notamment de montrer que si p est un nombre premier régulier, pour toute extension finie k de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, non ramifiée en dehors des places de caractéristique résiduelle $\neq p$ et de degré une puissance de p, (la compactification lisse de) toute courbe hyperbolique définie sur k et ayant bonne réduction en les places de k de caractéristique résiduelle $\neq p$ viole la conjecture de la section pro-p (quitte à remplacer k par une extension finie explicite).

1. La conjecture de la section pro-Σ

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Soit k un corps de caractéristique 0, $k \hookrightarrow \overline{k}$ une clôture algébrique de k et Γ_k son groupe de Galois absolu. Soit également X un schéma de type fini, géométriqement connexe sur k et $\overline{x}$ un point géométrique de $X_{\overline{k}} := X \times_k \overline{k}$. La suite de groupes fondamentaux induite par $X_{\overline{k}} \to X \to \mathrm{spec}(k)$ est alors une suite exacte courte

$$(X/\mathcal{P}) \ \ 1 \to \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x}) \to \pi_1(X; \overline{x}) \to \Gamma_k \to 1.$$

Etant donné un sous-ensemble fini non vide Σ de $\mathcal{P}$, on note $\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})^{(\Sigma)}$ la complétion pro-Σ de $\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})$. Par définition $K(X_{\overline{k}}, \Sigma) := \ker(\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})^{(\Sigma)})$ est un sous-groupe caractéristique de $\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})$ donc, en particulier, distingué dans $\pi_1(X; \overline{x})$ et on peut poser

$$\pi_1(X; \overline{x})^{[\Sigma]} := \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x}) / K(X_{\overline{k}}, \Sigma).$$

En prenant le quotient de $(X/\mathcal{P})$ par $K(X_{\overline{k}}, \Sigma)$, on obtient un épimorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
(X/\mathcal{P}) & 1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \pi_1(X; \overline{x}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \Gamma_k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
(X/\Sigma) & 1 \arrow[r] & \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})^{(\Sigma)} \arrow[r] & \pi_1(X; \overline{x})^{[\Sigma]} \arrow[r] & \Gamma_k \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Notons $S(X/\Sigma)$ l'ensemble des sections de (X/Σ) modulo conjugaison intérieure par les éléments de $\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})^{(\Sigma)}$. Si $\emptyset \neq \Sigma \subset \Sigma' \subset \mathcal{P}$, on obtient par fonctorialité du $\pi_1(-)$, le diagramme commmutatif:

$$\begin{tikzcd}
S(X/\Sigma) \arrow[r] & S(X/\Sigma') \arrow[r] & S(X/\mathcal{P}) \\
X(k) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Sous sa forme la plus élémentaire, la conjecture de la section pro-Σ peut alors sénoncer comme suit.

Conjecture 1.1. (Section pro-Σ) *Soit k un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$ et X une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur k de genre ≥ 2. Alors l'application:*

$$X(k) \to S^{(\Sigma)}(X/k)$$

est bijective.

Date: Rencontre ARIVAF, 9-11 mars 2011, Bordeaux.

Pour $\Sigma = \mathcal{P}$, cette conjecture est due à Grothendieck [Gr83].

Remarque 1.2. (1) L'injectivité dans la conjecture de la section est connue. Considérons la suite exacte courte abélianisée

$$(X/ab)\quad 1 \to \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})^{ab} \to \pi_1(X; \overline{x})^{[ab]} \to \Gamma_k \to 1.$$

obtenue en quotientant $(X/\mathcal{P})$ par le sous-groupe dérivé (caractéristique) $\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})'$ de $\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})$. Pour $|\Sigma| \geq 2$, l'argument, du à Grothendieck, est élémentaire et montre en fait que $J_X(k)$ s'injecte déjà dans $S(X/ab)$. En effet, suposons $x \in X(k)$ et considérons le plongement associé de X dans sa jacobienne J_X. Celui-ci induit un isomorphisme Γ_k-equivariant de groupe profinis

$$\pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})^{ab} = \pi_1(J_{X_{\overline{k}}}; \overline{0})$$

On a également un isomorphisme canonique de Γ_k-modules

$$\pi_1(J_{X_{\overline{k}}}; \overline{0}) = T(J_X),$$

où $T(J_X)$ désigne le module de Tate de J_X. Comme (X/ab) est de noyau abélien, l'ensemble $S(X/ab)$ est en bijection avec $\mathrm{H}^1(k, \pi_1(X_{\overline{k}}; \overline{x})^{ab}) = \mathrm{H}^1(k, T(J_X)$. Par ailleurs, on dispose de deux applications canoniques $J_X(k) \to \mathrm{H}^1(k, T(J_X)$, l'une induite par la fonctorialité du $\pi_1(-)$ et l'autre en prenant la limite projective des premiers connectants $\kappa_n : J_X(\overline{k}) \to \mathrm{H}^1(k, J_X[n])$ des suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes de Kummer

$$0 \to J_X(\overline{k})[n] \to J_X(\overline{k}) \stackrel{[n]}{\to} J_X(\overline{k}) \to 0.$$

Ces deux applications coincident et le noyau de la seconde est le plus grand sous-groupe Σ-divisible de $J_X(k)$, lequel est trivial par Mordell-Weil dès que $|\Sigma| \geq 2$. (*Cf.* paragraphe 3.4.1 pour plus de détails). Pour $|\Sigma| = 1$, l'argument est du à Mochizuki [M99], qui montre plus généralement l'injectivité dans la conjecture de la section pour $\Sigma = \{p\}$ et k *sub-p-adique i.e.* sous-corps d'une extension de type finie de $\mathbb{Q}_p$.

(2) On peut également formuler une variante birationnelle de la conjecture de la section pro-Σ en remplaçant la suite exacte courte $(X/\mathcal{P})$ par la suite exacte courte de Galois usuelle

$$1 \to \Gamma_{\overline{k}k(X)} \to \Gamma_{k(X)} \to \Gamma_k \to 1).$$

Dans ce contexte, la conjecture de la section pro-Σ a été montrée par Koenigsman [K05] pour $\Sigma = \mathcal{P}$ et k p-adique. Ce résultat a ensuite été étendu par Pop [P10] pour $\Sigma = \{p\}$ et k p-adique. Ces résultats suggèrent que la conjecture 1.1 pourrait également être vérifiée pour un corps de base p-adique.

Au vue du théorème de Faltings-Mordell, l'injectivité dans la conjecture de la section motive la conjecture de finitude suivante.

Conjecture 1.3. (Finitude des sections pro-Σ) *Soit k un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$ et X une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur k de genre ≥ 2. Alors*

$$|S^{(\Sigma)}(X/k)| < +\infty.$$

Hoshi donne des contre-exemples aux conjectures 1.1 et 1.3 (et à leurs variantes affines) pour $\Sigma = \{p\}$ et k un corps de nombres ou k p-adique. Ce sont ces résultats que je vais décrire maintenant. Pour simplifier l'exposition, je me limiterai au cas où X est propre et k un corps de nombres.

2. Enoncé

A partir de maintenant, étant donné un corps k, une k-courbe signifiera une courbe séparée, lisse et géométriquement connexe sur k. Rappelons qu'une k-courbe X est dite hyperbolique si les trois conditions équivalentes suivantes sont vérifiées:

(i) Si g_X est le genre de la compactification lisse de X et r_X le degré du diviseur à l'infini, alors

$$2g_X - 2 + r_X > 0;$$

(ii) $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(X_{\overline{k}})$ est fini;
(iii) Le centre de $\pi_1(X_{\overline{k}})$ est trivial.

On se fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ et, étant donné un nombre premier p, $\zeta_p \in \overline{\mathbb{Q}}$ une racine primitive p-ième de p. Notons $\mathbb{Q}^{unp}$ la sous extension galoisienne maximale pro-p de $\mathbb{Q}(\zeta_p) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ non-ramifiée au-dessus des places de caractéristique résiduelle différente de p.

Soit maintenant $\mathbb{Q}(\zeta_p) \hookrightarrow k \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$ une sous-extension finie, U une k-courbe hyperbolique ayant *bonne réduction au-dessus des places de caractéristique résiduelle différente de* p et X la compactification lisse de U sur k. Supposons que U possède un point k-rationnel x.

Théorème 2.1. *Supposons p régulier. Alors, si $g_X \geq 2$ il existe une sous-extension finie $k \hookrightarrow k' \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$ telle que, pour toute sous-extension finie $k \hookrightarrow k' \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$, l'application*

$$X(k') \to S(X_{k'}/\{p\})$$

n'est pas surjective.

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, supposons de plus que* $\mathrm{H}^1(\Gamma_k, T_p(J_X))$ *est infini, il existe alors une sous-extension finie $k \hookrightarrow k' \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$ telle que l'ensemble*

$$S(X_{k'}/\{p\})$$

est infini.

Remarque 2.3. (1) Un nombre premier p est *régulier* si $p \geq 3$ et p ne divise pas le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Cette hypothèse va intervenir *via* le résultat de cohomologie galoisienne suivante, du à Shafarevich [Sh64]

Lemma 2.4. *Si p est un nombre premier régulier, le groupe de Galois $Gal(\mathbb{Q}^{unp}|\mathbb{Q}(\zeta_p))$ est un pro-p groupe libre.*

Comme tout sous-groupe fermé d'un pro-p groupe libre est encore de type fini [RiZ00, Cor. 7.7.5], on déduit immédiatement du lemme 2.4 que si p est un nombre premier régulier et $\mathbb{Q}(\zeta_p) \hookrightarrow k \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$ est une sous-extension finie alors $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{unp}|k)$ est encore un pro-p groupe libre.

$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ sont réguliers mais on ne sait pas s'il existe ou non une infinité de nombres premiers réguliers.

(2) L'hypothèse que U a bonne réduction au-dessus des places de caractéristique résiduelle différente de p signifie que pour une telle place $s \in \mathrm{spec}(\mathcal{O}_k)$, on peut trouver une courbe propre et lisse $\mathcal{X} \to \mathrm{spec}(\mathcal{O}_k)$ et un diviseur $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ étale sur $\mathrm{spec}(\mathcal{O}_k)$ tels que $\mathcal{X}_k \setminus \mathcal{D}_k \simeq U$. Sous cette hypothèse, il résulte de [SGA1, XIII] qu'on a un isomorphisme de spécialisation

$$sp_s : \pi_1(U_{\overline{k}})^{(p)} \to \pi_1(\mathcal{X}_{\overline{s}} \setminus \mathcal{D}_{\overline{s}})^{(p)}$$

compatible avec $\pi_1(U) \supset D_s \twoheadrightarrow \Gamma_{k(s)} := D_s/I_s$, où D_s et I_s sont les sous-groupes de décomposition et d'inertie de s dans $\pi_1(U)$ respectivement. En particulier, I_s agit trivialement par conjugaison sur $\pi_1(U_{\overline{k}})$. Ce résultat montre en particulier que tout revêtement étale $V \to U$ tel que $V_{\overline{k}} \to U_{\overline{k}}$ est galoisien de degré une puissancede p a également bonne réduction au-dessus des places de caractéristique résiduelle différente de p.

(3) Un exemple de courbe U vérifiant les hypothèses des théorème 2.1 et 2.2 (pour $p > 7$) sur $k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ est donné par la courbe de Fermat que l'on peut voir comme un revêtement $\mathcal{F}_p \equiv x^p + y^p = 1 \to T$ de $T = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, +\infty\}$. Ce revêtement est galoisien, de genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ et de groupe $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$. Puisque T a bonne réduction au-dessus des places de caractéristique résiduelle différente de p, la courbe $\mathcal{F}_p$ aussi. Enfin, le fait que $\mathrm{H}^1(\Gamma_k, T_p(J_{\mathcal{F}_p}))$ soit infini résulte du fait que, pour $p > 7$, le rang de $J_{\mathcal{F}_p}(k)$ est > 0 [GR78] (et de Mordell-Weil).

(4) L'hypothèse $\mathrm{H}^1(\Gamma_k, T_p(J_X))$ est en particulier vérifiée lorsque $J_X(k)$ est de rang > 0 (*cf.* paragraphe 3.4.1.2).

La fin de l'exposé est consacré aux preuves des théorèmes 2.1 et 2.2.

3. Preuve

3.1. **Notations.** Notons $G := \Gamma_k$, $Q := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{unp}|k)$ et $r : G \twoheadrightarrow Q$ le morphisme de restriction canonique. Fixons un point géométrique $\overline{x}$ de $U_{\overline{k}}$ associé à $x \in XU(k)$ et notons encore $\overline{x}$ les points géométriques induits sur $X_{\overline{k}}$, $J_{X_{\overline{k}}}$, U, X et J_X. Pour $\square = U, X, J_X$, notons

$$\Delta_\square := \pi_1(\square_{\overline{k}}; \overline{x})^{(p)};$$
$$\Pi_\square := \pi_1(\square; \overline{x})^{[p]}.$$

Par fonctorialité du $\pi_1(-)$ et de la completion pro-p, le diagramme de schémas

$$\mathrm{spec}(\Omega) \xrightarrow{\overline{x}} U \hookrightarrow X \xhookrightarrow{\iota_x} J_X$$

(où $\iota_x : X \hookrightarrow J_X$ est l'immersion fermée induite par $x \in X(k)$) induit des épimorphismes de suites exactes courtes

(1)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Delta_U \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_U \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Delta_X \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_X \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Delta_{J_X} \arrow[r] & \Pi_{J_X} \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Pour $\square = U, X, J_X$, la suite exacte courte $(\square/\{p\})$ induit une représentation

$$\rho_\square : G \to \mathrm{Out}(\Delta_\square),$$

où $\mathrm{Out}(\Delta_\square) := \mathrm{Aut}(\Delta_\square)/\mathrm{Int}(\Delta_\square)$ est le groupe des automorphismes extérieurs de Δ. Pour $\square = T, U, X$, le centre de $\Delta_\square$ est trivial (hypothèse 1.) donc $\mathrm{Out}(\Delta_\square)$ apparait comme le quotient

$$1 \to \Delta \to \mathrm{Aut}(\Delta_\square) \to \mathrm{Out}(\Delta_\square) \to 1.$$

A l'opposé, Δ_{J_X} est abélien donc $\mathrm{Aut}(\Delta_{J_X}) = \mathrm{Out}(\Delta_{J_X})$.

3.2. **Les groupes $\Pi_\square^Q$.** Le point clef de la preuve de Hoshi consiste à 'remplacer' Q par G dans le diagramme (1) afin d'exploiter que, sous l'hypothèse p régulier, Q est un pro-p groupe libre. Cela repose sur le lemme suivant.

Lemma 3.1. *Quittes à remplacer k par une sous-extension finie $k \hookrightarrow k' \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$ on peut supposer que pour $\square = U, X, J_X$, la représentation $\rho_\square : G \to \mathrm{Out}(\Delta_\square)$ se factorise via*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\rho_\square"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "r"'] & \mathrm{Out}(\Delta_\square) \\
Q \arrow[ur, "\overline{\rho}_\square"'] &
\end{tikzcd}$$

3.2.1. $\square = U, X$. On définit $\Pi_\square^Q$ comme le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(\Delta_\square) \arrow[r] & \mathrm{Out}(\Delta_\square) \\
\Pi_\square^Q \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Q \arrow[u, "\overline{\rho}_\square"']
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $\begin{array}{ccc}\Pi_\square & \to & \mathrm{Aut}(\Delta_\square) \\ \gamma & \to & \gamma - \gamma^{-1}\end{array}$ et $\Pi_\square \twoheadrightarrow G \overset{r}{\twoheadrightarrow} Q$ définissent un unique morphisme $\Pi_\square \to \Pi_\square^Q$; on vérifie sans difficulté qu'on a un épimorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
(\square/\{p\}/Q) & 1 \arrow[r] & \Delta_\square \arrow[r] & \Pi_\square^Q \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1 \\
(\square/\{p\}) & 1 \arrow[r] & \Delta_\square \arrow[r] \arrow[u, equal] & \Pi_\square \arrow[r] \arrow[u, twoheadrightarrow] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Q \arrow[r] \arrow[u, twoheadrightarrow, "r"'] & 1,
\end{tikzcd}$$

où le carré de droite est *cartésien*.

3.2.2. $\square = J_X$. On pose cette fois-ci $\Pi^Q_{J_X} := \Pi^Q_X/\Delta'_X$. L'épimorphisme $\Pi_X \twoheadrightarrow \Pi^Q_X \twoheadrightarrow \Pi^Q_{J_X}$ passe au quotient en un épimorphisme $\Pi_{J_X}(= \Pi_X/\Delta'_X) \twoheadrightarrow \Pi^Q_{J_X}$ et, là encore, on vérifie sans difficulté qu'on a un épimorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd} (J_X/\{p\}/Q) & 1 \arrow[r] & \Delta_{J_X} \arrow[r] & \Pi^Q_{J_X} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Q \arrow[r] & 1 \\ (J_X/\{p\}) & 1 \arrow[r] & \Delta_{J_X} \arrow[r] \arrow[u, equal] & \Pi_{J_X} \arrow[r] \arrow[u, two heads] & Q \arrow[r] \arrow[u, two heads, "r"'] & 1, \end{tikzcd}$$

où le carré de droite est *cartésien.*

3.3. **Relations entre les différents ensembles de sections.** On notera que pour $\square = U, X, J_X$, le groupe $\Pi^Q_\square$ est un pro-p groupe.

(1) Les morphismes de suites exactes courtes

$$(U/\{p\}) \to (X/\{p\}) \to (J_X/\{p\})$$

et

$$(U/\{p\}/Q) \to (X/\{p\}/Q) \to (J_X/\{p\}/Q)$$

induisent respectivement des applications

$$S(U/\{p\}) \to S(X/\{p\}) \to S(J_X/\{p\})$$

et

$$S(U/\{p\}/Q) \to S(X/\{p\}/Q) \to S(J_X/\{p\}/Q)$$

(2) Par ailleurs, comme les carrés

$$\begin{tikzcd} \Pi_\square \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \arrow[d, "r"] \\ \Pi^Q_\square \arrow[r, two heads] & Q \end{tikzcd}$$

sont cartésiens, pour toute section $s^Q_\square \in S(\square/\{p\}/Q)$ les morphismes $Id_G : G \to G$ et $s^Q_\square \circ r : G \to \Pi^Q_\square$ définissent un unique morphisme $s : G \to \Pi_\square$, qui est automatiquement une section de $(\Pi_\square/\{p\})$. On a donc également une application

$$S(\square/\{p\}/Q) \to S(\square/\{p\}).$$

Et pour $\square = J_X$, on a

Lemma 3.2. *L'application*

$$S(J_X/\{p\}/Q) \tilde{\to} S(J_X/\{p\})$$

est bijective.

On peut alors déduire du lemme 3.2 l'énoncé suivant, qui est le coeur de l'article d'Hoshi.

Théorème 3.3. *Supposons de plus p régulier. Alors, l'application*

$$S(U/\{p\}) \twoheadrightarrow S(J_X/\{p\})$$

est surjective.

Preuve. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} S(J_X/\{p\}) \arrow[r] & S(J_X/\{p\}/Q)\ , \\ S(U/\{p\}) \arrow[u] & S(U/\{p\})/Q) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où, d'après le lemme 3.2, la première flèche horizontale est bijective. Pour montrer que la flèche verticale de gauche est surjective il suffit donc de montrer que la flèche verticale de droite l'est. Comme Q est un pro-p groupe libre et $\Pi^Q_\square$ est un pro-p groupe, toute section $s^Q_{J_X} \in S(J_X/\{p\}/Q)$ admet un relèvement

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dotted, "s^Q_U"'] \arrow[d, "s^Q_{J_X}"] \\ \Pi^Q_U \arrow[r] & \Pi^Q_{J_X} \end{tikzcd}$$

et celui-ci est est automatiquement une section de $(U/\{p\})$. $\square$

3.4. **Conclusion des preuves des théorèmes 2.1 et 2.2.**

3.4.1. *Description de* $J_X(k) \to S(J_X/\{p\})$.

3.4.1.1. *Sections des suites exactes courtes de noyau abélien.* La suite exacte courte $(J_X/\{p\})$ étant de noyau abélien, l'ensemble $S(J_X/\{p\})$ est classifié par $\mathrm{H}^1(G, \Delta_X)$. Plus précisément, la section $s_0 : G \to \Pi_{J_X}$ induite par la section zéro sur J_X munit Δ_{J_X} d'une structure de G-module et l'application qui à une section $s : G \to \Pi_{J_X}$ de $(J_X/\{p\})$ associe la classe dans $\mathrm{H}^1(G, \Delta_{J_X})$ du 1-cocycle $s - s_0 : G \to \Delta_X$ passe au quotient par $\mathrm{Int}(\Delta_{J_X})$ en induisant une bijection

$$S(J_X/\{p\}) \tilde{\to} \mathrm{H}^1(G, \Delta_{J_X}).$$

On en déduite donc une première application

$$c : J_X(k) \to S(J_X/\{p\}) \tilde{\to} \mathrm{H}^1(G, \Delta_{J_X})$$

3.4.1.2. *Premier connectant de la suite exacte courte de Kummer.* Pour tout entier $n \geq 1$, la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de G-modules (dite 'de Kummer')

$$0 \to J_X(\overline{k})[p^n] \to J_X(\overline{k}) \stackrel{[p^n]}{\to} J_X(\overline{k}) \to 0$$

induit au niveau du premier connectant une suite exacte

$$0 \to p^n J_X(k) \to J_X(k) \stackrel{\kappa_{p^n}}{\to} \mathrm{H}^1(G, J_X(\overline{k})[p^n])$$

et, en passant à la limite projective sur n, une suite exacte

$$0 \to \bigcap_n p^n J_X(k) \to J_X(k) \stackrel{\kappa_{p^\infty}}{\to} \mathrm{H}^1(G, T_p(J_X))(= \varprojlim \mathrm{H}^1(G, J_X(\overline{k})[p^n])).$$

3.4.1.3. *Comparaison.* Modulo l'identification canonique de Δ_{J_X} et $T_p(J_X)$ comme G-modules, on a

Lemma 3.4. *Les morphismes $c, \kappa_{p^\infty} : J_X(k) \to \mathrm{H}^1(G, T_p(J_X))$ coincident.*

Preuve. Il suffit de revenir à la définition/construction des morphismes c et κ_{p^∞}. Pour $x \in J_X(k)$, notons $F_{\overline{x}}$ le foncteur fibre en $\overline{x} : \mathrm{spec}(\overline{k}) \to J_X$ sur la catégorie des revêtements étale de J_X et fixons un système projectif

$$\underline{x} = (N)_{n\geq 0} \in \varprojlim F_{\overline{x}}([N]).$$

Alors $\kappa_{p^\infty}(x)$ est la classe de cohomologie du cocycle

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k & \to & T_p(J_X) \\ \sigma & \to & ({}^\sigma x_{p^n} - x_{p^n})_{n\geq 0}. \end{array}$$

Par ailleurs, la section $s^0_x : \Gamma_k \to \pi_1(J_X; \overline{x}) = \mathrm{Aut}(F_{\overline{x}})$ associée à $x \in J_X(k)$ est définie par

$$s^0_x(\sigma)((y_N)_{N\geq 0}) = ({}^\sigma y_N)_{N\geq 0}$$

pour $(y_N)_{N\geq 0} \in \varprojlim F_{\overline{x}}([N])$ (rappelons que les $([N] : J_{X_{\overline{k}}} \to J_{X_{\overline{k}}})_{n\geq 0}$ forment un système cofinal parmi les revêtements galoisiens de $J_{X_{\overline{k}}}$). De plus, $\underline{x}$ définit un chemin étale $\alpha_{\underline{x}} : F_{\overline{0}} \tilde{\to} F_{\overline{x}}$ de 0 à x par

$$\begin{array}{llll} \alpha_{\underline{x}}([N]): & F_{\overline{0}}([N]) & \tilde{\to} & F_{\overline{x}}([N]) \quad , \ N \geq 1. \\ & y_N & \to & y_N + x_N \end{array}$$

La section $s_x := \alpha_{\underline{x}} \circ s_x^0 \circ \alpha_{\underline{x}}^{-1} : \Gamma_k \to \pi_1(J_X;\overline{0})$ correspondante est donc définie par

$$s_x(\sigma)((y_N)_{N\geq 0}) = ({}^{\sigma}y_N + x_N -{}^{\sigma} x_N)_{N\geq 0}$$

pour $(y_N)_{N\geq 0} \in \varprojlim F_{\overline{0}}([N])$. La classe de cohomologie du 1-cocycle $s_0 - s_x : \Gamma_k \to \pi_1(J_{X_{\overline{k}}};\overline{0}) \twoheadrightarrow \Delta_{J_X}$ est donc $\kappa_{p^\infty}(x)$. □

Dans ce qui suit, rappelons que k est une sous-extension finie $\mathbb{Q}(\zeta_p) \hookrightarrow k \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$.

3.4.2. *Fin de la preuve du théorème 2.2.* Cela résulte immédiatement du théorème 3.3 et du fait que $S(J_X/\{p\}) = \mathrm{H}^1(G, T_p(J_X))$ est infini par hypothèse.

3.4.3. *Fin de la preuve du théorème 2.1.* Cela résulte des deux observations suivantes:

(1) $|i_{x_0}(X(\overline{k})) \cap J_X(\overline{k})_{tors}| < +\infty$ (Manin-Mumford [R83]);
(2) $J_X(\overline{k})[p^\infty] = J_X(\mathbb{Q}^{unp}[p^\infty])$ (lemme 3.1).

En effet, celles-ci montrent qu'on peut toujours trouver une sous-extension finie $k \hookrightarrow k' \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$ et $y \in J(k')[p^\infty]$ tel que, pour tout $z \in i_x(X(\overline{k})) \cap J_X(\overline{k})_{tors}$ on a

$$v_p(|\langle y\rangle|) > v_p(|\langle z\rangle|).$$

Mais alors la section $s_y : G \to \Pi_{J_X}$ de $(J_X/\{p\})$ ne peut provenir d'un point $y' \in X(k)$. Sinon $s_y - s_{i_x(y')}$ serait dans

$$\ker(\kappa_{p^\infty}) = \bigoplus_{q\neq p} J_X(k)[q^\infty],$$

qui est fini d'ordre premier à p par Mordell-Weil. Cela imposerait $v_p(|\langle y\rangle|) = v_p(|\langle i_x(y')\rangle|)$.

3.5. **Preuve des lemmes 3.1 et 3.2.** Dans les deux cas, il s'agit de montrer qu'un morphisme de groupe profini

$$\alpha : G \to \Gamma$$

se factorise *via* $r : G \twoheadrightarrow Q$ (pour le lemme 3.1, $\alpha = \rho_\square : G \to \mathrm{Out}(\Delta_\square)$ et pour le lemme 3.2, $\alpha = \beta\circ\sigma$, où $\sigma : G \to \Pi_{J_X}$ est une section de $(J_X/\{p\})$ et $\beta : \Pi_{J_X} \twoheadrightarrow \Pi^Q_{J_X}$ est le morphisme canonique). Par définition de $r : G \to Q$, il suffit de montrer que

(i) $\mathrm{im}(\alpha)$ est un pro-p groupe;
(ii) Pour toute place s de k de caractéristique résiduelle $\neq p$, le groupe d'inertie I_s de s dans G est dans le noyau de α.

3.5.1. *Fin de la preuve du lemme 3.1.*
3.5.1.1. Reduction au cas où $\square = U$. Etant donné un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Delta \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \Pi \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Delta' \arrow[r] & \Pi \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

on ne peut pas, en général, comparer les représentations extérieures induites $\rho : G \to \mathrm{Out}(\Delta)$ et $\rho' : G \to \mathrm{Out}(\Delta')$. Cependant, si $\alpha : \Delta \twoheadrightarrow \Delta'$ est surjective, on a $\ker(\rho) \subset \ker(\rho')$ donc, dans notre cas, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{im}(\rho_U) \arrow[r, two heads] & \mathrm{im}(\rho_X) \arrow[r, two heads] & \mathrm{im}(\rho_{J_X}). \\ G \arrow[u, "\rho_U"] \arrow[ur, two heads, "\rho_X"] \arrow[urr, two heads, "\rho_{J_X}"'] & & \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que $\rho_U : G \to \mathrm{Out}(\Delta_U)$ se factorise *via* $r : G \twoheadrightarrow Q$.

3.5.1.2. *Preuve de (i).* Cela résulte du fait général suivant.

Lemma 3.5. [RiZ00, Lemme 4.55]*Soit Γ un pro-p groupe de type fini. Alors le noyau du morphisme de groupes profinis*

$$\Gamma \to \mathrm{Aut}(\Gamma^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p)$$

est un pro-p groupe.

Dans notre cas, Δ_U^{ab} est une extension (scindée) de G-modules

$$0 \to \mathbb{Z}_p(1)^{r-1} \to \Delta_U^{ab} \to \Delta_{J_X} \to 0$$

donc, en tensorisant par $\mathbb{Z}/p$, on obtient une extension

$$0 \to \mathbb{Z}/p(1)^{r-1} \to \Delta_U^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p \to J_X[p](\overline{k}) \to 0$$

Comme $\zeta_p \in k$, G agit trivialement sur $\mathbb{Z}/p(1)^{r-1}$. Par ailleurs, comme J_X a bonne réduction en les places s de k de caractéristique résiduelle $\neq p$, on a $J_X[p](\overline{k}) = J_X[p](\mathbb{Q}^{unp})$. Donc, quitte à remplacer k par la sous-extension finie $k \hookrightarrow k' \hookrightarrow \mathbb{Q}^{unp}$ obtenue en adjoignant à k les corps de définitions des points de p-torsion de J_X on peut supposer que $\mathrm{im}(\rho_U)$ est un pro-p groupe.
3.5.1.3. *Preuve de (ii).* Cela résulte de la remarque 2.3 2.

3.5.2. *Fin de la preuve du lemme 3.2.* On se fixe une section $\sigma : G \to \Pi_{J_X}$ de $(J_X/\{p\})$ et on introduit les notations

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Delta_{J_X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Pi_{J_X} \arrow[r, "p_{J_X}"] \arrow[d, "\beta"] & G \arrow[r] \arrow[d, "r"] \arrow[l, bend right, "\sigma"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Delta_{J_X} \arrow[r] & \Pi_{J_X}^Q \arrow[r, "p_{J_X}^Q"] & Q \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Il faut montrer que $\beta \circ \sigma : G \to \Pi_{J_X}^Q$ se factorise *via*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\beta\circ\sigma"] \arrow[d, "r"'] & \Pi_{J_X}^Q . \\ Q \arrow[ur, "\overline{\sigma}"'] & \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\overline{\sigma} : Q \to \Pi_{J_X}^Q$ est alors automatiquement une section de $(J_X/\{p\}/Q)$ et on vérifie facilement que la flèche $\sigma \to \overline{\sigma}$ fournit un inverse de $S(J_X/\{p\}/Q) \to (J_X/\{p\})$.
3.5.2.1. *Preuve de (i).* C'est immédiat puisque $\Pi_{J_X}^Q$ est un pro-p groupe.
3.5.2.2. *Preuve de (ii).* Soit s une place de k de caractéristique résiduelle $\neq p$, I_s un groupe d'inertie de s dans G et D_s le groupe de décomposition qui le contient. Par définition de $r : G \twoheadrightarrow Q$, on a $\beta \circ \sigma(I_s) \subset \ker(p_{J_X}^Q) = \Delta_{J_X}$ donc $\beta \circ s$ se restreint en un morphisme

$$\beta \circ s : I_s \to \Delta_{J_X},$$

D_s-equivariant pour les actions suivantes

$$\begin{array}{lll} D_s \times I_s & \to & I_s, \\ (u, v) & \to & uvu^{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} D_s \times \Delta_{J_X} & \to & \Delta_{J_X} \\ (u, \gamma) & \to & \beta \circ s(u)\gamma\beta \circ s(u)^{-1}. \end{array}$$

Comme Δ_{J_X} est un pro-p groupe commutatif, $\beta \circ s : I_s \to \Delta_{J_X}$ se factorise en un morphisme D_s-équivariant

$$\begin{tikzcd} I_s \arrow[r, "\beta\circ s"] \arrow[d] & \Delta_{J_X} \\ I_s^{(p),ab} \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Notons $\phi \in D_s/I_s = \Gamma_{k(s)} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$ un générateur. Comme J_X a bonne réduction en s, I_s agit trivialement sur Δ_{J_X} et ϕ opère sur Δ_{J_X} avec des valeurs propres de module $|k(s)|^{\frac{1}{2}}$ [D70]. Par ailleurs, I_s agit également trivialement sur $I_s^{(p),ab}$ mais, cette fois-ci, ϕ opère sur $I_s^{(p),ab}$ avec des valeurs propres de module $|k(s)|$ (*e.g.* [S68]). Donc $\beta \circ s$ est le morphisme trivial.

References

[D70] P. Deligne, *Théorie de Hodge I*, Actes du congrès international des mathématiciens Nice, 1970 (Gauthier-Villars 1971), p. 425–430.

[GR78] B.H. Gross et D.E. Rohrlich, *Some results on the Mordell-Weil group of the Jacobian of the Fermat curve*, Invent. Math. **44**, 1978, p. 201–224.

[SGA1] A. Grothendieck et al, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer-Verlag, 1971.

[Gr83] A. Grothendieck *Letter to G. Faltings (June 1983)*, in *Geometric Galois actions 1*, P. Lochak, L. Schneps eds., L.M.S. L.N.S. **242**, Cambridge University Press, 1997.

[H10] Y. Hoshi *Existence of non-geometric pro-p Galois sections*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46**, 2010, p. 829-848.

[K05] J. Koenigsmann, *On the 'section conjecture' in anabelian geometry'*, J. Reine Angew. Math. **588**, 2005, p. 221–235.

[M99] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138**, 1999, p.319–423.

[P10] F. Pop, *On the birational p-adic section conjecture*, Compositio Math. **146**, 2010, p. 621–637.

[R83] M. Raynaud, *Courbes sur une variété abélienne et points de torsion*, Invent. Math. **71**, 1983, p. 207–233.

[RiZ00] L. Ribes and P. Zalesskii, *Profinite groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. **40**, Springer-Verlag, 2000.

[S68] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, 1968.

[Sh64] I.R. Shafarevich, *Extensions with given points of ramification*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **18**, 1964, p. 295–319.