Première suite exacte d'homotopie pour le groupe fondamental étale

Rencontre ARIVAF 1 - Exposé (5), Cédric Pépin

Objectif : étant donné un morphisme *propre* $X \to S$ (de schémas connexes, à fibres géométriquement connexes), et un point $s \in S$, relier $\pi_1(\overline{X}_s)$ aux groupes $\pi_1(X)$ et $\pi_1(S)$.

Notations : $f : X \to S$ est un morphisme de schémas, et s un point de S. Etant donnée une clôture algébrique $\overline{k(s)}$ de $k(s)$, on note X_s la fibre de f en s, et $\overline{X}_s$ la fibre géométrique $X \times_S \mathrm{Spec}(\overline{(k(s)}) = X_s \otimes_{k(s)} \overline{k(s)}$. Un point géométrique de $\overline{X}_s$ est un morphisme $\overline{a} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \overline{X}_s$ où Ω est un corps algébriquement clos. Il induit un point géométrique a de X, et b de S.

1 La suite exacte en question

Lemme 1.1. *Soient S, X, des schémas connexes, $X \to S$ un morphisme de schémas et X_s une fibre géométriquement connexe. Alors la composée*

$$\pi_1(\overline{X}_s, \overline{a}) \to \pi_1(X, a) \to \pi_1(S, b)$$

est nulle.

Démonstration. Soit $S' \to S$ un revêtement étale. Le cube cartésien

$$\begin{tikzcd}
\overline{X'} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \overline{S'}_s \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & S' \arrow[dd] \\
\overline{X}_s \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}(\overline{k(s)}) \arrow[dr] & \\
& X \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

montre que $\overline{X'} \to \overline{X}_s$ est totalement décomposé, puisque $\overline{S'}_s \to \mathrm{Spec}(\overline{k(s)})$ l'est. Cqfd, d'après le dictionnaire galoisien. □

Définition 1.2 ([SGA 1] IX 2.1 p 179)**.** *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est* submersif *s'il est surjectif, et s'il fait de S un espace topologique quotient de X, i.e. U est ouvert dans S si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X. On dit que f est* universellement submersif *s'il est submersif après tout changement de base $T \to S$.*

Par exemple, un morphisme propre et surjectif est universellement submersif. Un morphisme fidèlement plat et quasi-compact est aussi universellement submersif.

Lemme 1.3. *Soient S, X, des schémas connexes. Si $f : X \to S$ est un morphisme* universellement submersif, à fibres géométriquement connexes, *alors la flèche*

$$\pi_1(X,a) \to \pi_1(S,b)$$

est un épimorphisme.

Démonstration. D'après le dictionnaire galoisien, il faut voir que si $S' \to S$ est un revêtement étale connexe, alors le revêtement $X' \to X$ est encore connexe. Or $X' \to S'$ est submersif, à fibres connexes, et S' est connexe. Donc X' est connexe. □

Définition 1.4 ([SGA 1] X p 201)**.** [1] *Soient k un corps et X un k-schéma. On dit que X est* séparable *sur k s'il est géométriquement réduit, i.e. $X_{k'}$ est réduit pour toute extension de corps k'/k. De façon équivalente, le schéma X est séparable sur k s'il est réduit, et si pour toute composante irréductible X_α de X, de point générique x_α, le corps résiduel $k(x_\alpha)$ est une extension séparable de k.*

Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est séparable *s'il est plat à fibres séparables.*

Théorème 1.5. *Soient S un schéma localement noethérien connexe, et $f : X \to S$ un morphisme de schémas. Si f est* propre, séparable, à fibres géométriquement connexes, *alors la suite*

$$\pi_1(\overline{X}_s, \overline{a}) \xrightarrow{i} \pi_1(X,a) \xrightarrow{p} \pi_1(S,b) \to 1$$

est exacte. C'est la première suite exacte d'homotopie pour le groupe fondamental.

D'après les lemmes 1.1 et 1.3, il ne reste plus qu'à montrer l'inclusion

$$\mathrm{Im}(i) \supseteq \mathrm{Ker}(p).$$

Pour cela, d'après le dictionnaire galoisien, il suffit de démontrer le fait suivant : si $\varphi : X'' \to X$ est un revètement étale connexe tel que $\overline{\varphi} : \overline{X''} \to \overline{X}_s$ possède une section, alors φ provient d'un revêtement étale connexe $S' \to S$. Le revêtement étale $S' \to S$ va être obtenu en prenant **la partie finie de la factorisation de Stein du morphisme propre et séparable** $f \circ \varphi : X'' \to X \to S$.

Faisons quelques rappels sur la factorisation de Stein d'un morphisme propre $f : X \to S$, avec S localement noethérien, avant d'étudier le cas séparable. Il s'agit de la décomposition canonique

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & S' \arrow[dl, "r"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où $S' := \mathrm{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X))$. Noter que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente puisque f est quasi-cohérent. Maintenant, le théorème de finitude pour les morphismes *propres* assure que r est un morphisme fini. D'autre part, le théorème de connexion de Zariski énonce que le morphisme propre f' est à fibres non vides et connexes. Par conséquent, pour tout $s \in S$, les composantes connexes de X_s sont en bijection avec les points de $S^{'}_s$. Comme la factorisation de Stein commute aux changements de base plats (donc aux « gonflements plats » de $k(s)$), les composantes connexes géométriques de X_s (i.e. les composantes connexes de $\overline{X}_s$) sont en bijection avec les points de $\overline{S'}_s$. En appliquant ceci à $X \to S'$, dont la factorisation de Stein est triviale, on trouve que les fibres de f' sont en fait géométriquement connexes.

1. Voir aussi [EGA IV]$_2$ 4.6.1 lorsque la base est un corps, et *loc. cit.* 6.8.1 pour la notion de morphisme séparable *en un point*. On demande alors que les fibres soient localement noethériennes, ce qui assure notamment que la propriété est ouverte dans les fibres, cf. *loc. cit.* 4.6.13.

Théorème 1.6. *Soit f un morphisme propre de schémas localement noethériens. Si f est* séparable*, alors le morphisme fini*

$$r : \mathrm{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X)) \to S$$

est étale.

On suit plutôt Murre [M] 6.2.1 p 103, à ceci près qu'on isole la partie « platitude cohomologique ». La fin de l'argument diffère légèrement de la preuve esquissée dans [SGA 1] 10.1.2 p 202, et dans [EGA III]$_2$ 7.8.6 p 74 (quand on veut conclure à partir de « $T(k) = k$ »).

Démonstration. Dire que r est non-ramifié signifie que pour tout $s \in S$,

$$f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$$

est produit d'extensions finies séparables de $k(s)$. Or, par hypothèse,

$$f_*(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s))$$

est de cette forme (les sections globales d'une composante connexe de X_s forment un corps, extension finie de $k(s)$, séparable puisque les extensions résiduelles des points génériques des composantes irréductibles sont séparables). Pour montrer que r est non-ramifié, il suffit donc de voir que

$$f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s) = f_*(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)).$$

Plus généralement, considérons le morphisme de foncteurs

$$\Theta(\mathcal{M}) : T'(\mathcal{M}) = f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M} \to T(\mathcal{M}) = f_*(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M})$$

sur la catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules quasi-cohérents. Comme X/S est plat, T est exact à gauche, et T' est exact à droite par définition. En particulier, si la transformation naturelle Θ est un isomorphisme, alors T' est exact, i.e. r est plat, puis d'après ce qui précède, le morphisme r est étale (noter que $s \to S$ est quasi-compact et séparé !). Le théorème est donc conséquence du résultat suivant. □

Théorème 1.7 ([EGA III]$_2$ 7.8.6 p 74)**.** *Soient S un schéma localement noethérien, $f : X \to S$ un morphisme* propre et séparable*. Alors f est cohomologiquement plat en dimension* 0*, i.e., la transformation naturelle*

$$\Theta(\mathcal{M}) : T'(\mathcal{M}) = f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M} \to T(\mathcal{M}) = f_*(\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M})$$

est un isomorphisme (« propriété d'échange », « à la Künneth »).

Démonstration. L'image directe (d'un morphisme de type fini et séparé entre schémas localement noethériens) commute aux changements de base plats. De plus, le fait que $\Theta(\mathcal{M})$ soit un isomorphisme peut se vérifier après localisation aux points de S, puis localisation fpqc. On se ramène comme cela au cas où S est local d'annneau $(A, \mathfrak{m})$ de point fermé s. Ensuite, *comme X_s est (propre et) séparable*, il existe une extension (finie) $k'/k(s)$ telle que $\Gamma(X_s \otimes_{k(s)} k')$ soit un produit de copies de k'. Donc, par un gonflement plat de A d'extension résiduelle $k'/k(s)$, on se ramène au cas où $\Gamma(X_s)$ est produit de copies de $k(s)$. Puis, par complétion, on peut en outre supposer A complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Notons enfin que T, T' commutent aux limites inductives filtrantes (X est maintenant noethérien), et donc qu'il suffit de prouver la bijectivité de $\Theta(\mathcal{M})$ pour $\mathcal{M}$ cohérent.

C'est alors qu'on fait appel au *théorème de comparaison de Grothendieck en géométrie formelle*. Dans notre cas, celui-ci s'enonce de la façon suivante. Posant $A_n := A/\mathfrak{m}^{n+1}$, on a un isomorphisme canonique

$$T(M) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \Gamma(X_n, \mathcal{O}_X \otimes_A M_n) = \varprojlim_n T_n(M_n)$$

(plus généralement,

$$\widehat{H^q(X, \mathcal{F})} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^q(X_n, \mathcal{F}_n)$$

pour $X \to \operatorname{Spec}(A)$ propre, A noethérien, $\mathcal{F}$ cohérent sur X, I idéal de A, X_n sous-schéma fermé de X défini par $I^{n+1}\mathcal{O}_X$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X / I^{n+1}\mathcal{O}_X$.) Maintenant, on vérifie facilement que la bijectivité de $\Theta(\mathcal{M})$ pour $\mathcal{M}$ cohérent sur le schéma affine S est équivalente à (i.e. ne fait pas qu'impliquer) l'exactitude de T (considérer une présentation libre de $\mathcal{M}$ et utiliser le fait $\Theta(\mathcal{M})$ est un isomorphisme lorsque $\mathcal{M}$ est libre). Or la formule montre que l'exactitude des T_n sur les modules cohérents se transmet à T, grâce à la condition (ML) ([EGA III]$_1$ 0 13.2.1 p 65 ou [M] *loc. cit.*), qui est ici vérifiée parce que les M_n sont de longueur finie. On est donc ramené au cas où A est artinien, de corps résiduel k, et $\Gamma(X_s)$ est produit de copies de k.

Par additivité, on peut se restreindre à une composante connexe de X. Comme X et X_s ont même espace topologique sous-jacent, la fibre X_s est alors connexe [2]. Donc $\Gamma(X_s)$ n'a pas d'idempotent non trivial, puis $\Gamma(X_s) = k$ [3]. En particulier,

$$\Theta(k) : T'(k) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_A k \to T(k) = \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = k$$

est surjectif (puisque $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ envoit 1 sur 1). On en tire que $\Theta(M)$ est surjectif pour tout M de type fini sur A, en considérant les k-espaces vectoriels $\mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1} M$. Puis une écriture

$$0 \to N \to A^n \to M \to 0$$

et le diagramme exact correspondant

$$\begin{tikzcd}
T'(N) \arrow[r] \arrow[d] & T'(A^n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & T'(M) \arrow[r] \arrow[d, "\Theta(M)"] & 0 \\
T(N) \arrow[r] & T(A^n) \arrow[r] & T(M) &
\end{tikzcd}$$

montrent que $\Theta(M)$ est aussi injectif, cqfd. □

Fin de la démonstration du théorème 1.5. Comme on l'a rappelé plus haut, il reste à démontrer le fait suivant : si $\varphi : X'' \to X$ est un revêtement étale connexe tel que $\overline{\varphi} : \overline{X''} \to \overline{X}_s$ possède une section, alors φ provient d'un revêtement étale connexe $S' \to S$.

Or $f \circ \varphi : X'' \to X \to S$ est propre et séparable, donc d'après le théorème 1.6, **sa factorisation de Stein introduit un revêtement étale** $S' \to S$. Considérons

2. Plus généralement, en utilisant la factorisation de Stein, on peut voir que si X est un schéma propre sur un anneau local hensélien de point fermé s, la flèche $\pi_0(X_s) \to \pi_0(X)$ est une bijection.

3. Par conséquent $T(A) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to T(k) = \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = k$ est *surjective* puisque $\Gamma(S, \mathcal{O}_S) = A \to k$ l'est. Grothendieck en conclut alors (par [EGA III] 7.5.2 p 58) que T est exact à droite, ce qui achève sa preuve.

alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & X'' \arrow[dll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[ddl] \\
X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "p"'] \arrow[d] & \\
S & S' \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

(où le carré est cartésien par définition) et montrons que le morphisme canonique $\alpha : X'' \to X'$ est un isomorphisme. On voit d'abord sur le diagramme que c'est un revêtement étale (=morphisme fini étale). Ensuite X' est connexe : $X'' \to S'$ est surjectif et X'' est connexe, donc S' est connexe, donc X' est connexe d'après la partie épimorphisme de la suite exacte. En particulier, le rang de α est constant sur X', et il ne reste plus qu'à voir que ce rang est 1 (alors α sera un isomorphisme, comme on le voit par exemple en le décomposant totalement après une extension étale).

Pour cela, il faut vérifier que la fibre $\alpha^{-1}(x')$ est de rang 1 en un certain point x' de X', que l'on peut choisir au-dessus de s, et par conséquent on se ramène par changement de base au cas $S = \mathrm{Spec}(\overline{k(s)})$. Mais alors α induit une bijection $\pi_0(X'') \to \pi_0(X')$ (puisque X''/S' et X'/S' sont surjectifs à fibres connexes sur l'ensemble fini S'), et il suffit donc de trouver $C \in \pi_0(X'')$ tel que α induise un isomorphisme de $C \to \alpha(C)$. Comme $X'' \to X$ est maintenant totalement décomposé, il suffit de prendre $C = \sigma(X)(= \sigma(\overline{X}_s))$, où σ est la section de $\varphi(= \overline{\varphi})$ donnée par hypothèse (σ induit un isomorphisme $X \to C$, et p induit un isomorphisme $\alpha(C) \to X$ puisque $\alpha(C)$ est une composante connexe de X'' telle que $p(\alpha(C)) = X$ et que p est totalement décomposé). $\square$

C'est donc le théorème de comparaison en géométrie formelle (aussi appelé parfois « théorème sur les fonctions formelles ») qui est au coeur de la première suite d'homotopie pour le groupe fondamental. Il est apparu dans la démonstration du théorème 1.7. C'est aussi l'ingrédient essentiel du théorème de connexion de Zariski, utilisé avec $X'' \to S'$ dans la partie finale de démonstration du théorème 1.5.

2 Applications au produit par un schéma propre sur un corps

Corollaire 2.1. *Soient k un corps algébriquement clos, X, Y des k-schémas connexes, avec X/k propre et Y localement noethérien. Soient $(a, b) \in X(k) \times Y(k)$. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\pi_1(X \times_k Y, (a, b)) \to \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Comme le π_1 est invariant par immersion fermée nilpotente (cf. [SGA 1] I 8.3 p 12), on peut remplacer X par X_{red} sans changer aucun des trois groupes. Ceci étant, le théorème 1.5 appliqué à la seconde projection, propre, (maintenant) séparable, à fibres géométriquement connexes ($k = \overline{k}$)

$$p : X \times_k Y \to Y$$

fournit la suite exacte

$$\pi_1((X \times_k Y)_b, (a, b)) = \pi_1(X, a) \to \pi_1(X \times_k Y, (a, b)) \to \pi_1(Y, b) \to 1.$$

On utilise l'hypothèse sur les corps résiduels pour avoir la première égalité.

Pour terminer la démonstration, on remarque que la suite est scindée par l'existence de la première projection $X \times_k Y \to X$, qui fournit une rétraction de la première flèche. $\square$

Corollaire 2.2. *Soient k un corps algébriquement clos, X un k-schéma connexe, propre sur k. Soit k'/k une extension de corps, avec k' algébriquement clos. Soient a' un point géométrique de $X_{k'}$, et a son image dans X. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\pi_1(X_{k'}, a') \to \pi_1(X, a)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il est surjectif puisqu'un revêtement étale connexe de X est encore connexe sur k' (puisque $k = \overline{k}$). Pour l'injectivité, il suffit de montrer que tout revêtement étale connexe de $Z' \to X_{k'}$ provient d'un revêtement étale $Z \to X$ (cf. dictionnaire galoisien, en travaillant composante connexe par composante connexe).

Par des arguments standards de présentation finie et passage à la limite, il existe une k-algèbre intègre de type fini $A \subseteq k'$ et un revêtement étale $Z_0 \to X \times_k S$ ($S := \mathrm{Spec}(A)$) tel que $(Z_0)_{k'} = Z'$. Notant η le point générique de S, $(Z_0)_\eta$ est schématiquement dense dans Z_0, donc ce dernier est connexe puisque $((Z_0)_\eta)_{k'} = Z'$ l'est. D'après le corollaire 2.1, on a un isomorphisme

$$\pi_1(X \times_k S, (x, s)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) \times \pi_1(S, s)$$

pour tout $(x, s) \in X(k) \times S(k)$ fixé. Le sous-groupe ouvert U_{Z_0} correspondant à Z_0 (connexe) contient un produit $U_{\widetilde{X}} \times U_{\widetilde{S}}$, par définition de la topologie produit. D'où des revêtements étales connexes $\widetilde{S} \to S$, $\widetilde{X} \to X$, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{X} \times_k \widetilde{S} \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
Z_0 \arrow[d] & \widetilde{Z_0} \arrow[l] \arrow[d] & \\
X \times_k S & X \times_k \widetilde{S} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

où le carré est cartésien par définition. On va montrer que $\widetilde{Z_0} = Z \times_k \widetilde{S}$ pour un certain revêtement étale (connexe) $Z \to X$. Ceci achèvera la démonstration, puisqu'on aura alors un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
Z' = (Z_0)_{k'} \arrow[d] & (\widetilde{Z_0})_{\widetilde{S}_{k'}} \arrow[l] \arrow[d] \\
X' = X \times_k \mathrm{Spec}(k') & X \times_k \widetilde{S}_{k'} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

avec $(\widetilde{Z_0})_{\widetilde{S}_{k'}} = Z \times_k \widetilde{S}_{k'}$ et $\widetilde{S}_{k'} \to \mathrm{Spec}(k')$ totalement décomposé.

Montrons donc que $\widetilde{Z_0} = Z \times_k \widetilde{S}$ pour un revêtement étale Z/X. Pour cela, montrons d'abord que $\widetilde{Z_0}$ est connexe. Pour tout point générique $\widetilde{\eta}$ de $\widetilde{S}$, on a une factorisation

$$\eta \leftarrow \widetilde{\eta} \leftarrow \mathrm{Spec}(k')$$

puisque k' est algébriquement clos et $k(\widetilde{\eta})/k(\eta)$ est finie. Choisissant une section $\mathrm{Spec}(k') \to \widetilde{S}_{k'}$, on complète le diagramme ci-dessus en

$$\begin{tikzcd}
Z' = (Z_0)_{k'} \arrow[d] & (\widetilde{Z_0})_{\widetilde{S}_{k'}} \arrow[l] \arrow[d] & (\widetilde{Z_0})_{k'} \arrow[l] \arrow[d] \\
X' = X \times_k \mathrm{Spec}(k') & X \times_k \widetilde{S}_{k'} \arrow[l] & X \times_k \mathrm{Spec}(k'). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Ainsi $(\widetilde{Z_0})_{k'} = Z'$ est connexe, donc $(\widetilde{Z_0})_{\widetilde{\eta}}$ est connexe, et ceci pour tout point générique $\widetilde{\eta}$ de $\widetilde{S}$. Comme $X \times_k \widetilde{S}$ est connexe, on en déduit que $\widetilde{Z_0}$ est connexe. Mais alors, le revêtement $\widetilde{Z_0} \to X \times_k \widetilde{S}$ correspond à un sous-groupe ouvert $U_{\widetilde{Z_0}}$ tel que

$$U_{\widetilde{X}} \times U_{\widetilde{S}} \subseteq U_{\widetilde{Z_0}} \subseteq \pi_1(X \times_k \widetilde{S}, (x, \widetilde{s})) = \pi_1(X, x) \times U_{\widetilde{S}}$$

(pour un relèvement fixé $\widetilde{s} \in \widetilde{S}(k)$ de s). On en déduit que $U_{\widetilde{Z_0}}$ est de la forme $U_Z \times U_{\widetilde{S}}$ (explicitement

$$U_Z = \{z \in \pi_1(X, x) \mid z \times U_{\widetilde{S}} \subseteq U_{\widetilde{Z_0}}\})$$

cqfd. $\square$

On a démontré au passage la version géométrique suivante :

Corollaire 2.3. *Soient k un corps algébriquement clos, X, Y deux k-schémas localement noethériens. On suppose Y connexe, et X ou Y propre sur k. Soit*

$$Z' \to X \times_k Y$$

un revêtement étale connexe. Alors les Z'_y pour $y \in Y(k)$ sont tous isomorphes.

Démonstration. Comme dans la démonstration du corollaire 2.2, on trouve un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[d] & Z \times_k \widetilde{Y} \arrow[l] \arrow[d] \\
X \times_k Y & X \times_k \widetilde{Y} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et donc, pour tout $y \in Y(k)$, un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
Z'_y \arrow[d] & Z \times_k \widetilde{Y}_y \arrow[l] \arrow[d] \\
X \times_k y & X \times_k \widetilde{Y}_y. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Mais comme k est algébriquement clos, le revêtement $\widetilde{Y}_y \to y$ est totalement décomposé, et par conséquent Z'_y est isomorphe à Z. $\square$

Le corollaire ci-dessus est un résultat de Lang-Serre dans le cas de schémas algébriques normaux. D'après [SGA 1] 1.10 p 205, c'est leur travail qui « a été la motivation initiale pour la théorie du groupe fondamental développée dans ce Séminaire » ! Voir aussi l'exposé ARIVAF (7) pour une preuve du théorème de Lang-Serre pour les variétés abéliennes, reposant sur le corollaire 2.1.

Par ailleurs, en combinant les corollaires 2.1 et 2.2, on obtient :

Corollaire 2.4. *Soient k un corps algébriquement clos, X, Y deux k-schémas connexes, avec X/k propre et Y localement noethérien. Soit k'/k une extesnion de corps, avec k' algébriquement clos, et soient $(a,b) \in X(k') \times Y(k')$. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\pi_1(X \times_k Y, (a,b)) \to \pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,b)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La preuve du corollaire 2.1 fournit l'isomorphisme canonique

$$\pi_1(X \times_k Y, (a,b)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_{k'}, a) \times \pi_1(Y,b)$$

et le corollaire 2.2 permet de conclure. □

L'invariance du π_1 d'un k-schéma propre par extension de corps algébriquement clos (corollaire 2.2) a la conséquence importante suivante.

Théorème 2.5. *Soient k un corps algébriquement clos* de caractéristique 0*, X une courbe connexe,* propre *et lisse sur k. Pour tout point géométrique a de X, le groupe fondamental étale $\pi_1(X,a)$ est topologiquement de type fini.*

Démonstration. Comme X est de type fini sur k, il existe un modèle X_0 de X sur une extension $k_0/\mathbb{Q}$ de degré de transcendance fini. On peut alors plonger k_0 dans $\mathbb{C}$ (donc aussi $\overline{k_0}$, qui par ailleurs est contenu dans le corps algébriquement clos k) et faire le calcul suivant grâce au corollaire 2.2 :

$$\pi_1(X) = \pi_1(X_0 \times_{k_0} k) = \pi_1(X_0 \times_{k_0} \overline{k_0}) = \pi_1(X_0 \times_{k_0} \mathbb{C})$$

(où on base tout en a ou son image dans ce qu'il convient). Mais grâce au théorème GAGA et au calcul du π_1 topologique d'une surface de Riemann, le dernier groupe est topologiquement de type fini. □

Remarque 2.6. Le théorème précédent est encore vrai en caractéristique > 0 (cf. exposé ARIVAF (8)), et en dimensions supérieures, d'ailleurs sans hypothèse de lissité (exposé ARIVAF (9)).

3 Sur la structure du π_1 d'une courbe

La variante suivante du corollaire 2.2 est due à F. Pop ([S] pp 185-186).

Proposition 3.1 (F. Pop)**.** *Le corollaire 2.2 est vrai dès que le groupe $\pi_1(X,a)$ (ou $\pi_1(X_{k'},a')$ est topologiquement de type fini.*

Démonstration. Comme $k = \overline{k}$, la flèche

$$\pi_1(X_{k'}, a') \to \pi_1(X,a)$$

est un épimorphisme. Maintenant, un lemme « classique » sur les groupes profinis (*loc. cit.*) assure que si l'un des deux groupes n'a qu'un nombre fini de sous-groupes ouverts normaux d'indice donné, alors l'épimorphisme est un isomorphisme si et seulement si les deux groupes ont les mêmes quotients finis. Or $\pi_1(X,a)$ étant topologiquement de type fini, vérifie la condition d'indice ci-dessus. Autrement dit, étant donné un revêtement galoisien $Z' \to X_{k'}$ de groupe G, on cherche un revêtement galoisien $Z \to X$ de même groupe G, mais *on ne demande pas que ce soit un modèle de Z' sur k*. Pour trouver un tel Z, on considère comme avant une k-algèbre intègre de type fini $A \subseteq k'$ et un revêtement étale $Z_0 \to X \times_k S$ ($S := \mathrm{Spec}(A)$), de groupe

G, tel que $(Z_0)_{k'} = Z'$ (pour voir que le groupe structural descend sur S, penser à Z' comme un $G_{X_{k'}}$-torseur). Alors le morphisme $Z_0 \to S$ a une fibre générique géométriquement connexe (puisqu'isomorphe à Z' sur $k' = \overline{k'}$), donc, par constructibilité ([EGA IV]$_3$ 9.7.7 (ii)), il existe $s \in S(k)$ tel que $Z := (Z_0)_s \to X_s = X$ soit un G_X-torseur étale *connexe*, i.e. un revêtement galoisien de X de groupe G. □

Corollaire 3.2. *Soient k un corps algébriquement clos* de caractéristique 0*, X une courbe connexe, lisse,* propre ou affine *sur k. Pour tout point géométrique a de X, le groupe fondamental étale $\pi_1(X, a)$ est topologiquement de type fini.*

Démonstration. Conservons les notations de la démonstration du théorème 2.5. Grâce au calcul du π_1 topologique d'une surface de Riemann privée d'un nombre fini de points, et au théorème GAGA, on sait que $\pi_1(X_0 \times_{k_0} \mathbb{C})$ est topologiquement de type fini. En particulier $\pi_1(X_0 \times_{k_0} \overline{k_0})$ est topologiquement de type fini puisque la flèche canonique

$$\pi_1(X_0 \times_{k_0} \mathbb{C}) \to \pi_1(X_0 \times_{k_0} \overline{k_0})$$

est un épimorphisme (et même un isomorphisme par la proposition 3.1, mais ce n'est pas utile ici). En appliquant alors 3.1 (là c'est utile !), on trouve que

$$\pi_1(X) = \pi_1(X_0 \times_{k_0} k) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_0 \times_{k_0} \overline{k_0})$$

est topologiquement de type fini. □

On évite ainsi le théorème difficile 1.5, et on prouve un cas plus général que le corollaire 2.5.

Par contre, en caractéristique $p > 0$, on ne peut pas en général se passer de l'hypothèse de propreté dans 2.2 et dans 2.5. En effet ([G] p 219), soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et $S := \mathbb{A}^1_k$ la droite affine sur k. Considérons le revêtement galoisien d'Artin-Schreier

$$0 \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S \to \mathbb{G}_{a,S} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{G}_{a,S} \to 0$$

où $\mathcal{P}$ est le Frobenius moins l'Identité. La suite exacte longue de cohomologie associée fournit un isomorphisme

$$k[t]/\operatorname{Im}(\mathcal{P}) = H^1_{\text{ét}}(S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Comme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_S$ est totalement décomposé sur S,

$$H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^1(\pi_1(S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(\pi_1(S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

([SGA 1] p 231). Or une section additive de la projection canonique

$$k[t] \to k[t]/\operatorname{Im}(\mathcal{P})$$

est donnée par les représentants

$$\sum_{n>0,(n,p)} a_n t^n, \quad a_n \in k \text{ presque tous nuls.}$$

On a donc un isomorphisme *de groupes*

$$\operatorname{Hom}(\pi_1(S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq k^{(\mathbb{N})}.$$

Pour une raison de cardinalité, le groupe $\pi_1(\mathbb{A}^1_k)$ dépend donc du corps algébriquement clos k. De plus, il n'est pas topologiquement de type fini (sinon, il aurait un nombre fini de sous-groupes ouverts normaux d'indice p, et donc l'ensemble $\operatorname{Hom}(\pi_1(\mathbb{A}^1_k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ serait fini).

Références

[EGA III] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHES **11** (1961), **17** (1963).

[EGA IV] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. IHES **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[G] P. Gille, *Le groupe fondamental sauvage d'une courbe affine en caractéristique* $p > 0$, dans J.B. Bost et al., Groupe fondamental et courbes semi-stables en géométrie algébrique, Progress in Math., vol 187, Birkhauser, 2000.

[M] J.P. Murre, *An introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata Institute of Fundamental Research, 1967.

[S] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **117**, Cambridge University Press, 2009.

[SGA 1] A. Grothendieck et al., *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.