Exposé ARIVAF2 N. Borne

I Inadéquation de la topologie de Zariski

ref: Milne, milne.org

X schéma

La topologie de Zariski convient

pour calculer – la cohomologie des faisceaux cohérents

– $H^1(X, GL_n)$

mais ne convient pas

pour calculer – la cohomologie des faisceaux (localement) constants

– $H^2(X, \mathbb{G}_m)$, $H^1(X, PGL_n)$, ...

lemme Si X est un espace topologique irréductible

alors $H^i(X, \Lambda_X) = 0$ pour tout faisceau constant. $i > 0$

preuve Si U ouvert $\Lambda_X(U) = \Lambda^{\pi_0(U)}$

Si $U \neq \emptyset$ comme X est irréductible U est connexe

donc $\Lambda_X(U) = \Lambda$. Donc Λ_X est flasque.

Autre manifestation de ce problème : la suite de Kummer

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1$$

n'est pas exacte à droite pour la topologie de Zariski.

Mais elle le serait pour la topologie étale si n inversible$/X$.

2/

II Cohomologies de Weil

1 définition — référence : Y. André *Une introduction aux motifs* §3.3

$\mathcal{P}(k)$ catégorie des k schémas projectifs lisses

Muni de $\times_k$ catégorie monoidale symétrique

$\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$ fait de tout X une cogèbre cocommutative.

VecGr_K $\otimes$ catégorie rigide des K espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués

$\mathrm{VecGr}_K^{\geq 0}$ sous catégorie des objets concentrés en degré ≥ 0

<u>déf</u> Une cohomologie de Weil H^* pure est un foncteur monoidal

$$H^* : \mathcal{P}(k)^{op} \longrightarrow \mathrm{VecGr}_K^{\geq 0} \quad \text{vérifiant}$$

(*) $\dim_K H^2(\mathbb{P}^1) = 1$ et muni de (1) et (2)

<u>Rem</u> (1) $\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$ induit une multiplication (cup-produit) sur $H^*(X)$

(2) On exclut les « théorèmes de Lefschetz faible et fort. »

(3) H^* monoidal signifie qu'on a un isomorphisme donné

$$H^*(X \times Y) \simeq H^*(X) \otimes H^*(Y)$$

<u>Données supplémentaires</u>

$r \in \mathbb{Z}$ $\quad (r) : \mathrm{VecGr}_K \longrightarrow \mathrm{VecGr}_K$ " torsion à la Tate "

$$V^* \longmapsto V^* \otimes H^2(\mathbb{P}^1)^{\otimes -r}$$

(1) trace, dualité de Poincaré

$X \in \mathcal{P}_k$ purement de dimension d $\quad H^{2d}(X)(d) \xrightarrow{tr_X} K$

iso si X géo. connexe / i) $tr_{X \times Y} = tr_X \times tr_Y$

ii) $\langle\, , \rangle : H^i(X) \times H^{2d-i}(X)(d) \longrightarrow H^{2d}(X)(d) \xrightarrow{tr_X} K$

accouplement

(2) classe de cycle pour tout $X \in \mathcal{P}_k$

$$\gamma_X^r : CH^r(X) \longrightarrow H^{2r}(X)(r)$$, contravariant, et

vérifiant diverses compatibilités.

2 propriétés

$$H^*(\mathrm{Spec}\,k) = H^0(\mathrm{Spec}\,k) \overset{tr}{=} K$$

$$H^i(X) = 0 \qquad i > 2\dim X$$

$$f : X \to Y \qquad f_* : H^*(X)(d_X) \longrightarrow H^{*-2(d_X-d_Y)}(Y)(d_Y)$$

morphisme de Gysin

$$tr_X = p_{X*} \qquad p_X : X \to \mathrm{Spec}\,k$$

$\gamma_X^0([X])$ est l'unité de $H^*(X)$

formule des traces de Lefschetz

3 cohomologies de Weil « classiques »

a) car $k = 0$

a1) ℓ premier $\qquad \bar{k}$ fixé $\qquad K = \mathbb{Q}_\ell$

$$H^i_\ell(X) = H^i_{et}(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)$$

cohomologie étale ℓ-adique

a2) $K = k$

$$H^i_{DR}(X) = \mathbb{H}^i(\Omega^*_{X/k})$$

cohomologie de De Rham algébrique

a3) si $k \subset \mathbb{C}$ $\qquad K = \mathbb{Q}$

$$H^i_{sing}(X) = H^i(X_{an}, \mathbb{Q})$$

b) car $k = p > 0$

b1) $\ell \neq p$ $\qquad \bar{k}$ fixé $\qquad K = \mathbb{Q}_\ell$

$$H^i_\ell(X) = H^i_{et}(X \otimes_k \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)$$

b2) si k parfait $\qquad K = \mathrm{frac}(W(k))$

$$H^i_{cris}(X) = H^i_{cris}(X/W(k)) \otimes_{W(k)} [\tfrac{1}{p}]$$

rem (1) ce n'est pas tout. Au moins idéalement, on a un foncteur

$$\mathcal{P}(k)^{op} \longrightarrow Mot_{num}(k, \mathbb{Q}) \longleftarrow$$ catégorie abélienne semi simple dont viennent toutes les coh. de Weil.

(2) divers théorèmes de comparaison

III La cohomologie singulière et de Weil

1 cohomologie singulière

X espace topologique

R anneau commutatif

$S_k = S_k(X)$ R-module libre sur les applications continues $\Delta^k \xrightarrow{\sigma} X$

$\Delta^k = \{ (t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \;/\; 0 \leq t_i \leq 1 \quad \sum t_i = 1 \}$ k simplexe standard

$0 \leq i \leq k$ $\quad \varepsilon_i^k : \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ $\quad i$ ème application face

$(t_0, \dots, t_{k-1}) \longmapsto (t_0, \dots t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1})$

$\partial_k : S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)$

$\sigma \longmapsto \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \varepsilon_i^k$

$S^k(X) := \mathrm{Hom}(S_k(X), R)$

$H^*_{sing}(X, R) = \dfrac{Z^*(X,R)}{B^*(X,R)}$

$(S_*(X), \partial)$ complexe des chaines singulières

$(S^*(X), \partial)$ ——— co ———

2 cohomologie du faisceau constant

Prop X espace topologique localement contractile.

$$H^*(X, \mathbb{Z}_X) \simeq H^*_{sing}(X, \mathbb{Z})$$

principe de la preuve

$\mathcal{S}^k$ faisceau associé au préfaisceau $U \longrightarrow S^k(U, \mathbb{Z})$

étape 1 $\quad 0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{S}^0 \to \mathcal{S}^1 \to \dots$ résolution flasque

étape 2 $\quad \Gamma(\mathcal{S}^*) = H^0(X, \mathcal{S}^*)$ et $S^*(X)$ sont quasi-isomorphes.

Plus précisement

$$S^*(X) \xrightarrow{\nu} \Gamma(\mathcal{S}^*)$$

Le « théorème des petites chaines » montre que $\ker \nu$ est acyclique

3 Hypercohomologie

ref: Weibel

a) complexes doubles

$\mathcal{A}$ catégorie abélienne

def $(C^{p,q})$ complexe double

$d^h : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$ $\qquad d^v : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$

$d^h \circ d^h = 0 = d^v \circ d^v \qquad d^v \circ d^h + d^h \circ d^v = 0$

$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(C)^n = \prod_{p+q=n} C^{p,q} \qquad \mathrm{Tot}^{\oplus}(C)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$$

munis de $d = d^h + d^v$, sont des complexes.

b) résolution d'un complexe

$\mathcal{A}$ cat. ab. avec assez d'injectifs.

$A^* \in \mathrm{ob}\, Ch(\mathcal{A})$

déf résolution de Cartan-Eilenberg de A^* :

I^{**} complexe double $\quad I^{pq} = 0$ pour $q < 0$

+ augmentation $A^* \to I^{*0}$

tel que $B^p(A^*) \to B^p(I^{**}, d^h)$ et $H^p(A^*) \to H^p(I^{**}, d^h)$

soient des résolutions injectives

c) foncteurs dérivés

$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ exact à gauche

$$\mathbb{R}^i F : Ch^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}$$
$$A \longmapsto H^i(\mathrm{Tot}^{\Pi}(F(I)))$$

foncteurs hyper dérivés à droite

$$\boxed{\begin{array}{l} E_2^{pq} : R^p F(H^q(A)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q} F(A) \\ E_2^{pq} : H^p(R^q F(A)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q} F(A) \end{array}}$$

4 Cohomologie à supports compacts

ref | Gelfand – Manin | Kashiwara – Schapira

$f : Y \to X$ application continue X, Y loc. compacts

$\mathcal{G}$, faisceau $/ Y$

def $f_! \mathcal{G} \subset f_* \mathcal{G}$ " $f_! \mathcal{G}(U) = \{ s \in \mathcal{G}(f^{-1}U) \; / \; supp(s) \to U$ propre

image directe à support compacts

$\mathcal{F}$ faisceau $/ X$

i) $\Gamma_c(X, \mathcal{F}) = \{ s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \; / \; supp(s)$ compact $\}$

$\Gamma_c = s_!$ $\quad s : X \to *$

ii) $(f \circ g)_! = f_! g_!$ $\qquad \Gamma_c(X, f_! \mathcal{G}) \simeq \Gamma_c(Y, \mathcal{G})$

iii) $(f_! \mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \Gamma_c(f^{-1}x, \mathcal{G}|_{f^{-1}x})$

5 Dualité de Poincaré ref : Arcata

X variété topologique orientée ~~purement de dimension~~ d

On suppose qu'il existe « bon recouvrement » $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \le i \le N}$, i.e. tel que les intersections $\neq \emptyset$ d'U_i soient homéomorphes à des boules

a) Čech

Alors i) $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X) \xrightarrow{\sim} H^*(X, \mathbb{Z}_X)$

ii) $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_X)$ est la cohomologie du complexe $0 \to \mathbb{Z}^{A_0} \to \mathbb{Z}^{A_1} \to \cdots$ où

$A_k = \{(i_0, \ldots, i_k) \; / \; U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k} \neq \emptyset\}$

en effet $\boxed{\text{lemme de Poincaré : } H^*(U_{i_0} \cap \cdots U_{i_k}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } * = 0 \end{cases}}$

l) <u>Supports propres</u> $a=(i_0,\dots,i_k)\in A_k$, $j_a : U_a = U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_k} \longrightarrow X$

$$\begin{array}{c} \to \bigoplus_{a\in A_1} j_{a!}\mathbb{Z}_{U_a} \to \bigoplus_{a\in A_0} j_{a!}\mathbb{Z}_{U_a} \to 0 \\ \hspace{3em}\downarrow \\ \hspace{3em}\mathbb{Z}_X \end{array}$$

résolution de $\mathbb{Z}_X$

(car pour $j : U \to X$

$$(j_!\mathcal{F})_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & x\in U \\ 0 & x\notin U \end{cases}$$

" extension par zéro ")

en notant $\mathcal{Z}$ ce complexe (concentré en deg ≤ 0)

$$H^p_c(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{Z})) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_c(X,\mathcal{Z})$$

$$H^p(\ , H^q_c(X,\mathcal{Z})) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_c(X,\mathcal{Z})$$

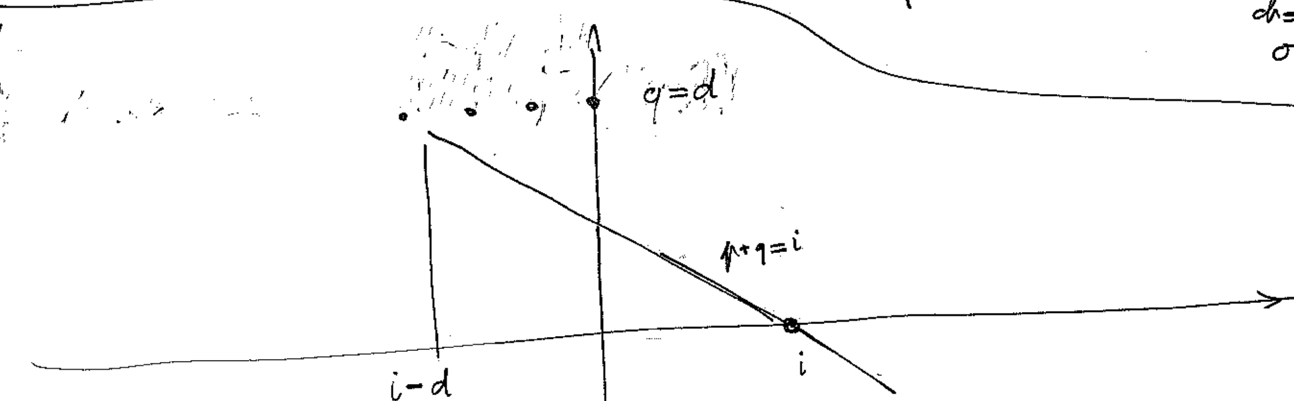
Comme
$$\mathcal{H}^q(\mathcal{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_X & q=0 \\ 0 & q\neq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{Z} \text{ résolution})$$

la première suite spectrale dégénère et $H^*_c(X,\mathbb{Z}_X) \simeq \mathbb{H}^*_c(X,\mathcal{Z})$

Pour calculer $H^q_c(X,\mathcal{Z})$ on utilise

(*) $$H^*_c(X, j_{a!}\mathbb{Z}) = H^*_c(U_a,\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & * \neq d \\ \mathbb{Z} & * = d \end{cases}$$

lemme de Poincaré, dépend du choix d'une orientation



$E_\infty^{pq} = gr_p(E^{p+q})$,

comme $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,\, q-r+1}$ sont nulles

on a $E_\infty^{pq} \simeq E_2^{pq}$

pour i fixé

$$gr_{i-d}(E^i) \simeq E_2^{i-d,d} = H^{i-d}(H^d_c(X,\mathcal{Z}))$$

$$gr_j(E^i) = 0 \quad \text{pour } j\neq i-d$$

On obtient donc $H^i_c(X, \mathbb{Z}_X) \simeq H^{i-d}(H^d_c(X, \mathbb{Z}))$

(*) Montrer que le complexe $H^d_c(X, \mathbb{Z})$ est

$$\cdots \to \mathbb{Z}^{A_2} \to \mathbb{Z}^{A_1} \to \mathbb{Z}^{A_0} \to 0 \quad \text{noté } C^* = C_{-*}$$

qui est le dual du complexe de Čech.

On conclut à l'aide de

Théorème des coefficients universels pour la cohomologie

C_* un complexe de chaînes de R-modules projectifs t.q. tout $d(C_n)$ est projectif

Alors on a une suite exacte $0 \to \mathrm{Ext}^1_R(H_{i-1}(C), R) \to H^i(\mathrm{Hom}_R(C, R)) \to \mathrm{Hom}_R(H_i(C), R) \to 0$

ref: Weibel

$$H_i(C) = H^{-i}(C^*) \simeq H^{d-i}_c(X, \mathbb{Z}_X)$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{d-i+1}_c(X, \mathbb{Z}_X), \mathbb{Z}) \to H^i(X, \mathbb{Z}_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{d-i}_c(X, \mathbb{Z}_X), \mathbb{Z}) \to 0$$

6 Produit tensoriel total

$\mathcal{F}^\cdot, \mathcal{G}^\cdot$ deux complexes de faisceaux de R-modules sur un espace topologique X.

On considère le complexe double $\mathcal{K}^{\cdot\cdot}$

$\mathcal{K}^{pq} = \mathcal{F}^p \otimes \mathcal{G}^q$ muni de $d_h = d \otimes id$, $d_v = (-1)^p id \otimes d$ "sign trick"

On dispose de $\mathrm{Tot}^{\oplus}(\mathcal{K}^{\cdot\cdot})$

Ceci permet de définir $\overset{L}{\otimes}\mathcal{G} : D^-(X, R) \to D^-(X, R)$

comme foncteur dérivé de $Ch^-(X, R) \to Ch^-(X, R)$, $\mathcal{F}^\cdot \mapsto \mathrm{Tot}^{\oplus}(\mathcal{F}^\cdot \otimes \mathcal{G}^\cdot)$

notes 1 chaque complexe dans $Ch^-(X, R)$ admet une résolution plate

2 indépendant de la variable privilégiée.

7 Formule de Künneth (esquisse) ref Kashiwara – Shapira

X, Y deux espaces topologiques localement compacts. (w) gld$(R) < \infty$

prop $\mathcal{F}_\bullet \in D^+(X,R)$

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, "r"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "q"'] & * \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}_\bullet \in D^+(Y,R)$

$$Rr_!(p_1^*\mathcal{F}_\bullet \overset{L}{\otimes} p_2^*\mathcal{G}_\bullet) \simeq Rp_!\mathcal{F}_\bullet \overset{L}{\otimes} Rq_!\mathcal{G}_\bullet$$

dans $D^+(*,R) = D^+(R\text{-mod})$.

preuve conséquence formelle des formules de changement de base et de projection pour $(Rf_!, f^*)$

rem Ersatz de Eilenberg – Zilber

de plus ref: Weibel

Thm (Formule de Künneth pour les complexes)

$C_*, C'_* \in Ch(R)$. Si C_n et $d(C_n)$ sont plats pour tout n

alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C)\otimes H_q(C') \longrightarrow H_n(\mathrm{Tot}^{\oplus}(C\otimes C')) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(C), H_q(C')) \to 0$$

en prenant $R = K$ un corps

$\mathcal{F}_\bullet = \mathcal{F}[0]$

$\mathcal{G}_\bullet = \mathcal{G}[0]$

on obtient

$$H^n_c(X\times Y, p_1\mathcal{F}\otimes p_2\mathcal{G}) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i_c(X,\mathcal{F})\otimes H^j_c(X,\mathcal{G})$$

IV Pas de cohomologie de Weil à coef. dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_\ell$ ou $\mathbb{R}$

1 Endomorphisme des courbes elliptiques

E/k courbe elliptique

$\mathrm{End}^\circ E := \mathrm{End}\, E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$\mathrm{End}\, E$ est muni de $\phi \to \hat{\phi}$, comme $\phi\hat{\phi} = \deg \phi > 0$ pour $\phi \neq$

on en déduit que $\mathrm{End}\,\phi$ n'a pas de diviseur de zéro.

Comme de plus $\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \hookrightarrow \mathrm{End}\,(T_\ell(E))$ $\quad \ell \neq \mathrm{car}\, k$

on en déduit que $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} \mathrm{End}\, E \leqslant 4$

$\mathrm{tr}\,\phi = \phi + \hat{\phi}$

$N(\phi) = \phi\hat{\phi}$

Comme tout $\phi \in E$ vérifie $\phi^2 - \mathrm{tr}(\phi)\,\phi + N(\phi) = 0$

si $\mathrm{End}(E)$ commutatif, alors $\mathrm{End}\, E = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ \mathcal{O} \text{ ordre de } K \quad [K/\mathbb{Q}] = 2 \\ \quad K \text{ imaginaire} \end{cases}$

si $\mathrm{End}(E)$ est non commutatif

alors $\mathrm{End}^\circ(E)$ est une algèbre de quaternion $\mathrm{End}^\circ(E) \simeq (a,b)$

$$(a,b) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}j \oplus \mathbb{Q}k$$

$$i^2 = a \qquad j^2 = b \qquad ij = -ji = k \qquad a, b \in \mathbb{Q}^*$$

qui est définie : $a < 0 \quad b < 0$

(pour ce dernier point on utilise

(a,b) définie $\iff$ (a,b) ne contient pas de sous corps quadratique réel)

Conséquence : S'il existe une cohomologie de Weil à coef dans $\mathbb{Q}$ sur les variétés proj lisses k, alors on a un morphisme de groupes $\mathrm{End}^\circ(E) \longrightarrow \mathrm{End}(H^1(E))$ et en fait d'anneaux (Künneth)

si $\mathrm{End}\, E$ non commutatif on doit avoir isomorphisme, contradiction car $\mathrm{End}\,(H^1(E)) \simeq M_2(\mathbb{Q})$ contient des diviseurs de zéro.

2 Courbes elliptiques supersingulières

E/k $\quad$ car $k = p > 0$

E est supersingulière si $E[p](\bar{k}) = \{0\}$

admis : alors $j(E) \in \mathbb{F}_{p^2}$, et donc

$\# \{ E/\bar{k} \text{ supersing} \}/_{\simeq_{\bar{k}}} < \infty$ $\qquad$ $\left(j(E) = j(E') \iff E_{\bar{k}} \simeq E'_{\bar{k}} \right)$

Théorème (Deuring) $k = \bar{k}$ $\mid$ E supersingulière $\iff$ $\mathrm{End}^\circ E$ algèbre de quaternions

? $k \supset \mathbb{F}_{p^2}$

preuve de $\Rightarrow$ Pour $l \neq p$ soit $G_l \subset E$ sous groupe d'ordre l. Comme E/G_l supersing, il existe $l \neq l'$ tel que $E/G_l \simeq E/G_{l'}$

$$\begin{array}{ccc} E/G_l & \xrightarrow{\sim} & E/G_{l'} \\ \uparrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow[\varphi]{} & E \end{array}$$

$\deg \varphi = l l'$

donc $\varphi \notin \mathbb{Z} \subset \mathrm{End}\, E$

Si $\mathrm{End}\, E$ était commutatif, alors $\deg : \underset{\overset{\|}{L}}{\mathrm{End}^\circ E} \to \mathbb{Q}$ est la norme d'un corps quad imaginaire.

Pour tout l, l' inertes dans L, $l \neq l'$, $l l'$ n'est pas une norme, donc $E/G_l \not\simeq E/G_{l'}$, contradiction.

3 ni sur $\mathbb{Q}_p$, ni sur $\mathbb{R}$ $\qquad$ $Br(\mathbb{R}) \simeq \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$

$Br(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Rappel :
$$0 \to Br(\mathbb{Q}) \to \bigoplus_v Br(\mathbb{Q}_v) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

? $k \supseteq \mathbb{F}_{p^2}$

Lemme Si E/k, $k = \bar{k}$, car $k = p$ est supersing., alors $\mathrm{End}^\circ E$ est l'unique algèbre de quaternions ramifiée en ∞, p.

preuve Comme $\mathrm{End}^\circ E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l \hookrightarrow \mathrm{End}(V_l(E))$ pour $l \neq p$, $\mathrm{End}^\circ E$ est non ramifiée en $l \neq p$.

Comme $\mathrm{End}^\circ E$ est définie, $\mathrm{End}^\circ E$ est ramifiée en ∞.

rem 0 plus précisément : pas de cohomologie de Weil sur $\mathbb{F}_{p^2}$ à coef dans $\mathbb{Q}_p$

rem ① (Katz) $H^i_{cris}(X)$ est définie sur $\mathrm{Frac}(W(k))$

par exemple pour $k = \mathbb{F}_{p^2}$ $H^i_{cris}(X)$ est définie sur $\mathbb{Q}_{p^2}$ (ext n.r. de $\mathbb{Q}_p$ de degré 2)

ce qui montre que $\mathbb{Q}_{p^2}$ déploie $\mathrm{End}^0(E)$.

② si E est supersingulière sur $\mathbb{F}_p$, il semble qu'on obtienne une contradiction. L'explication est que $\mathrm{End}\, E \subsetneq \mathrm{End}(E \otimes_k \bar{k})$, et que le thm de Deuring est vrai pour $k = \bar{k}$

③ il est peut être plus prudent de dire :
pas de cohomologie sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ à coef dans $\mathbb{Q}_p$
(mais à coef dans $\mathrm{Frac}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$, oui).
$= \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}_p^{nr})$

---

remarques ajoutées après l'exposé

④ les deux énoncés de la page 11/ sont vrais avec $k \supseteq \mathbb{F}_{p^2}$ sauf pour un nombre fini d'exceptions E pour des « petits p »

⑤ finalement ③ est trop prudent et ⓪ est justifié

⑥ il n'est pas clair que le fait que $\dim H^1(E) = 2$ résulte des axiomes d'une cohomologie de Weil.