Arivaf, deuxième groupe de travail
Cohomologie étale

Organisateurs : S. Brochard, M. Romagny

1 Informations pratiques

Date : 30, 31 mai et 1er juin 2011.
Lieu : Salle 1525-104 (30 mai et 1er juin), salle 1525-101 (31 mai) - campus Jussieu, Université Paris 6.

Planning :

Lundi 30 mai	Mardi 31 mai	Mercredi 1er juin
9h30 - 11h : Exp. 1	9h30 - 11h : Exp. 5	9h30 - 11h : Exp. 8
11h30 - 12h30 : Exp. 2	11h30 - 13h : Exp. 6	11h30 - 13h : Exp. 9
14h - 15h : Exp. 3	14h30 - 16h : Exp. 7	14h30 - 16h : Exp. 10
15h15 - 16h15 : Exp. 4		

Orateurs :
(1) Motivation - cohomologies de Weil (N. Borne)
(2) Sites, topologies et faisceaux (S. Brochard)
(3) Opérations sur les faisceaux, fonctorialité (F. Pazuki)
(4) Faisceaux constructibles et de torsion (C. Pépin)
(5) Cohomologie et théorèmes de comparaison (S. Brochard)
(6) Exemples, cohomologie des courbes (S. Maugeais)
(7) Changement de base propre (M. Perret)
(8) Dimension cohomologique, images directes supérieures à support compact (M. Romagny)
(9) Théorème du changement de base lisse (A. Cadoret)
(10) Dualité de Poincaré (J. Tong)

2 Objectifs et méthode

Les conjectures de Weil servent de guide et de motivation dans ce groupe de travail. Cependant les exposés consacrés à l'esquisse de leur preuve sont reportés à la rencontre Arivaf 4, qui aura lieu au premier trimestre 2012.

La rencontre est conçue comme un groupe de travail, ce qui implique que les exposés seront fortement dépendants les uns des autres et que tous les exposés (en particulier les premiers) ne déboucheront pas nécessairement sur l'énoncé ou la preuve d'un résultat frappant. Chaque oratrice/teur prendra soin de se coordonner avec ceux qui feront un exposé antérieur sur un sujet dont elle/il aura besoin, et avec ceux qui feront un exposé postérieur sur un sujet qui utilisera ses résultats.

Les références principales sont les livres de Freitag et Kiehl (*Étale Cohomology and the Weil Conjecture*), Milne (*Étale cohomology*) et dans une moindre mesure Deligne (SGA 4 1/2, *Cohomologie étale*, LNM 569).

3 Prérequis

– morphismes plats, étales, anneaux henséliens : [Mi] I, §§1–4, [BLR] Chap. 2, §§2-2–2-4

– suites spectrales : la référence commune sera [Mi] App B. Voir aussi [T] chap. 0, §2.3
– foncteurs dérivés : [Hart] III §1 et §2
– notion de faisceau sur un espace topologique : [Hart] II §1

Connaître la définition et les propriétés de base de la cohomologie singulière sera utile, au moins pour l'exposé 1 de motivations.

4 Résumé des exposés

1. Motivation - Cohomologies de Weil (1h30)
– motivation : insuffisances de la cohomologie de Zariski
– axiomes d'une cohomologie de Weil
– liste des cohomologies de Weil existantes
– vérification des axiomes pour la cohomologie singulière
– il n'existe pas de cohomologie de Weil à valeurs dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{R}$.
Il sera bienvenu de distribuer aux participants une photocopie donnant les axiomes des cohomologies de Weil, pour éviter un long recopiage au tableau.
Références : [Kl], [Wiki], [FK] (intro + début chap. I), [Hart] App. C, Hatcher [Hat] (cohomologie singulière)

2. Sites, topologies et faisceaux (1h)
– sites, (pré-)topologies, cas particuliers Zariski, étale, fppf, fpqc
– faisceaux, faisceaux associés [Mi] II, [T] II§6
– exemples et contre-exemples de faisceaux
– existence d'injectifs (idées de preuve), définition de la cohomologie
– anneaux locaux pour la topologie étale (henséliens et strict. henséliens), suites exactes de Kummer et d'Artin-Schreier [Mi, III.4]
On se contentera de la notion de prétopologie, plus simple que celle de topologie, et suffisante pour définir la cohomologie étale. De la construction du faisceau associé, on ne donnera que les idées, à l'exception d'une construction complète.
Références : [SGA4.5], [V] 2.3, [T], [Mi], [H] III, §1, [Ar]

3. Opérations sur les faisceaux, fonctorialité (45 min ou 1h)
– images directes et inverses : f^*, f_*. Ex : le morphisme identité d'un schéma muni d'une topologie, à valeurs dans lui-même muni d'une topologie moins fine [Mi] III, §3
– cas des immersions ouvertes et fermées, description des faisceaux étales via les faisceaux sur un ouvert et son complémentaire [Mi] II, Th. 3.10
– extension par zéro $j_!$ pour une immersion ouverte j
– propriétés d'exactitude et adjonctions
– exemples et contre-exemples
L'image directe extraordinaire $f_!$ ne sera définie que dans le cas d'une immersion ouverte $f = j$. Le cas général sera traité dans l'exposé sur les images directes supérieures à support propre.
Références : [Mi] II, §3 [Mi] III, §3

4. Faisceaux constructibles et de torsion (1h)
– motivation : plus petite classe de faisceaux étales contenant les faisceaux constants finis et stable par images directes supérieures propres
– faisceaux de torsion et $\varinjlim$ de faisceaux constructibles
– lien avec les espaces algébriques (définis comme quotients d'une relation d'équivalence étale)
– propriétés des catégories correspondantes (caractère abélien, stabilité par sous-faisceau...)
– exemples et contre-exemples
Références : [FK] I, §4 [Mi] V, §1

5. Cohomologie et théorèmes de comparaison (1h30)
– groupes de cohomologie, faisceaux Ext, images directes supérieures
– comparaison petit site / grand site

– coefficients particuliers : modules quasi-cohérents, schémas en groupes commutatifs lisses
– comparaison cohomologie étale / cohomologie complexe

Références : Milne [Mi] III, §3

6. Exemples ; cohomologie des courbes (1h30)

– spectre d'un corps, cohomologie galoisienne [T] II, §2.
– interprétation de H^1 en termes de torseurs (nécessaire pour chgt de base propre) [SGA1] [Mi] III.4
– cohomologie des courbes : coefficients $\mathbb{G}_m$, μ_n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [SGA4.5] Arcata III, [FK] I §5, [Mi]

NB : On traitera de manière complète la cohomologie des courbes à valeurs dans des faisceaux de torsion, sur laquelle reposent les grands théorèmes de la cohomologie étale

7. Théorème de changement de base propre (1h30)

– énoncé général
– cas d'un morphisme fini
– mentionner l'énoncé analogue en topologie (avec esquisse de preuve si le temps le permet), *cf.* [SGA 4.5] Arcata IV §1
– preuve dans le cas d'un morphisme projectif et d'un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules [FK] I, §6 ou [SGA 4.5] Arcata IV, §1 à §4
– contre-exemple si le faisceau n'est pas de torsion [SGA4] XII, 2

On pourra aussi regarder Milne [Mi] où une preuve complète est esquissée.

8. Dimension cohomologique, images directes supérieures à support compact (1h30)

– dimension cohomologique $cd_\ell(X)$; majoration $cd_\ell(X) \leq 2\dim(X)$ [Mi] VI, §1
– majoration $cd_\ell(X) \leq \dim(X)$ dans le cas affine [Mi] VI, §7, [FK] I, §9
– cohomologie à support compact et images directes supérieures à support compact $R^i f_!$: définition, différence avec les foncteurs dérivés de $\Gamma_c(X, -)$
– Théorème de finitude [Mi] VI, §2
– Théorème de changement de base [Mi] VI, §3, [FK] I, §8

On ne s'étendra ni sur les preuves des majorations de la dimension cohomologique ni sur la preuve du théorème de finitude, pour se concentrer sur le théorème de changement de base.
Références : [Mi] VI §1, 2, 3, [FK] I, §8

9. Changement de base lisse (1h30)

– acyclicité et acyclicité locale
– acyclicité locale (universelle) des morphismes lisses
– théorème de changement de base lisse
– "spécialisation lisse des groupes de cohomologie" : préservation des faisceaux localement constants par images directes supérieures propres et lisses

Références : [FK, I, §7] [Mi, VI, §4] [SGA4.5] Arcata V

10. Dualité de Poincaré (1h à 1h30)

– construction du cup-produit $H^r(X, F) \times H^s(X, G) \to H^{r+s}(X, F \otimes G)$ puis du cup-produit $H^r_c(X, F) \times H^s(X, G) \to H^{r+s}_c(X, F \otimes G)$.
– construction du morphisme trace pour les courbes $tr : H^2_c(X, \mu_n) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, [SGA 4.5] Arcata VI, §2
– dualité de Poincaré pour les courbes : preuve donnée dans SGA 4.5 Arcata VI §2, "preuve algébrique".
– existence du morphisme trace $tr : H^{2N}_c(X, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\otimes n}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans le cas général admise
– preuve dans le cas général : suivre l'esquisse donnée dans SGA 4.5, Arcata VI §3, en essayant de donner les détails là où c'est possible (par exemple on admettra l'existence de la suite spectrale de Leray en cohomologie à support propre).

Références : On se contentera de l'énoncé simplifié de [SGA4.5]. On pourra bien sûr consulter aussi [Mi] VI, §11 ou [FK] II, §1 qui donnent des énoncés plus généraux.

5 Thèmes reportés à Arivaf 4

Cohomologie l-adique
– motivation et définition
– quelques propriétés
– exemples

Preuve des conjectures de Weil
Donner les grandes lignes. Suivre par exemple [FK] chap. IV.

Représentations linéaires des groupes finis simples
Théorie de Deligne-Lusztig pour les représentations des groupes de Chevalley.

Actions du groupe fondamental ; exemples

Bibliographie

[BLR] Bosch, Lutkebohmert, Raynaud *Néron models*

[Ar] Artin, Grothendieck Topologies, disponible à `www.math.ubc.ca/~gor/Artin-GT.pdf`

[FK] Freitag, Kiehl, *Étale Cohomology and the Weil Conjecture*

[Hart] Hartshorne, *Algebraic geometry*

[Hat] Hatcher, *Algebraic Topology*, disponible à `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[Kl] Kleiman, S. L. (1968), *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, dans Dix exposes sur la cohomologie des schemas

[Mi] Milne, *Étale cohomology*

[Mu] Mumford, *Picard groups of moduli problems*

[T] Tamme, *Introduction to etale cohomology*

[SGA4.5] SGA 4 1/2, *Cohomologie étale*, LNM 569.

[V] Vistoli, *Grothendieck topologies...* dans *FGA explained*

[Wiki-1] Article de Wikipedia : *Weil cohomology theory*

[Wiki-2] Article de Wikipedia : *Étale cohomology*