CALCULER UNE ENVELOPPE CONVEXE

1. Introduction

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. De nombreux problèmes géométriques requièrent la détermination de l'enveloppe convexe de A.

L'enveloppe convexe de A sera notée $\mathrm{conv}(A)$. C'est la plus petite partie convexe de $\mathbb{R}^n$ qui contient A. La dimension de A est la dimension du plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ qui contient A.

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Un point x de C est dit extrémal s'il n'existe pas de couple (y, z) de points de C tels que x appartienne au segment ouvert $]y, z[$.

Dans notre étude, nous nous limitons au cas où A est un ensemble fini de points. Alors son enveloppe convexe est appelée un polytope. Ses points extrémaux sont appelés sommets.

On peut démontrer qu'une partie compacte convexe de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Ainsi, déterminer l'enveloppe convexe de A signifiera en déterminer les sommets.

2. Déterminer les sommets d'un polytope convexe

Soit C l'enveloppe convexe d'une partie finie A de $\mathbb{R}^n$. On suppose ici que C est de dimension n.

Un point $x \in A$ est un sommet de $\mathrm{conv}(A)$ s'il n'existe pas $n+1$ points $a_0, \ldots, a_n$ dans $A \setminus \{x\}$ tels que x appartienne à $\mathrm{conv}(a_0, \ldots, a_n)$ (le démontrer, en utilisant le théorème de Carathéodory).

Cette condition est assez facile à tester, par exemple en résolvant le système linéaire $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, en $n+1$ inconnues $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$. Dans le cas où les a_i sont affinement indépendants, le point x appartient à leur enveloppe convexe si et seulement si tous les λ_i sont positifs.

Quelle est la complexité de cet algorithme ? Supposons que A ait N éléments. Il faut parcourir, pour chaque élément x de A, les $\binom{N-1}{n+1}$ parties de $A \setminus \{x\}$, résoudre le système linéaire et éliminer le point x si ce n'est pas un sommet. C'est un algorithme en $O(N^{n+2})$.

3. Graham scan

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Alors l'algorithme décrit ci-dessus est en $O(n^4)$. On peut mieux faire.

Soit (Ox) l'axe des abscisses. On va se ramener à la situation où, si $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$, O est un point intérieur à A et où les angles $(\widehat{Ox, Oa_i})$

pris dans $[0, 2\pi[$ forment une suite croissante (à permutation circulaire des a_i près). On appelle étoile centrée en O un tel polygone.

Pour cela, il faut d'abord trouver un point P intérieur à l'enveloppe convexe de A. Pour cela, il suffit de trouver trois points non alignés de A et de prendre pour point p l'isobarycentre de ces points. Cela peut se faire en $O(n)$ opérations au pire. Ensuite, on place P à l'origine.

Il reste à trier les points a_i, suivant l'angle $(\widehat{px, pa_i})$. Pour cela, on peut considérer l'aire des triangles pa_ia_j. En effet, cette aire est positive si et seulement si $(\widehat{px, pa_i}) < (\widehat{px, pa_j})$. Cela peut se faire en $O(N \log N)$.

Supposons donc maintenant que $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ est une étoile centrée en O.

Si un point n'est pas un sommet de l'enveloppe convexe, alors il est soit intérieur à un triangle Opq, ou bien à un segment $]p, q[$, où p et q sont deux sommets consécutifs de l'enveloppe convexe.

L'algorithme de Graham consiste en une recherche sur les points ordonnés, durant laquelle les points intérieurs sont successivement éliminés.

On commence en un point, qu'on peut choisir comme étant le point le plus à droite de l'ensemble. Mettons que ce soit a_1. On regarde l'angle $a_1a_2a_3$. Si l'angle est sortant ou plat, a_2 ne peut pas être un sommet de l'enveloppe convexe, car alors il est intérieur soit au triangle Oa_1a_3, soit au segment $]a_1, a_3[$. Dans ce cas, on élimine a_2 et on considère $a_1a_3a_4$. Dans le cas contraire, on avance et on considère $a_2a_3a_4$. L'algorithme se termine quand on va de a_1 à lui-même sans avoir éliminer aucun point.

Théorème 3.1. *L'enveloppe convexe de N points du plan peut être calculé en un temps $O(N \log N)$, et un espace de $O(N)$.*

On peut adapter cet algorithme de telle sorte qu'on n'aie pas à comparer les angles, pour le tri. Pour cela, on partage l'ensemble A par la droite reliant le point le plus à gauche au point le plus à droite, puis on calcule d'abord l'enveloppe convexe des points qui se trouvent au-dessus, puis celle des points qui se trouvent en dessous. On travaille alors sur les points rangés suivant leurs abscisses.

Remarque. Le lien entre le problème de l'enveloppe convexe et celui du tri est bien mis en évidence par cet algorithme, au moins dans un sens : trier permet de calculer l'enveloppe convexe. Inversement, si, étant donné $\{x_1, \ldots, x_N\}$ un ensemble de nombres réels, on considère l'enveloppe convexe de l'ensemble des points (x_i, x_i^2), on voit que si l'on sait calculer efficacement une enveloppe convexe, on sait trier tout aussi efficacement un ensemble de nombres réels. Cela montre en particulier que pour le calcul d'une enveloppe convexe de N points, on ne pourra pas trouver d'algorithme en moins de $O(N \log N)$.

4. Diviser pour régner

Soit encore A une partie finie du plan et soit C son enveloppe convexe. Un algorithme de calcul de C de type “diviser pour règner” se décrirait de la façon suivante.

- On décompose A en deux sous-ensembles A_1 et A_2 qui en forment une partition et on en calcule les enveloppes convexes de manière récursive.
- On calcule l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$.

Il faut répondre à deux questions.

- Trouver une partition efficace. En pratique, on choisit les deux parties A_1 et A_2 approximativement de même cardinal.
- Calculer de manière efficace l'enveloppe convexe de la réunion de deux convexes.

Concentrons nous sur ce dernier aspect, et supposons avoir calculé les polygones P_1 et P_2 déterminant les enveloppes convexes C_1 et C_2 de A_1 et A_2.

Soit O un point intérieur à P_1 ; Par exemple son centre de gravité. Le point O sera intérieur à C, mais on doit distinguer deux cas, suivant que O appartient ou pas à C_2. Pour décider dans quel cas on se trouve, il faut regarder les angles $(\widehat{Ox, Oa})$, où a parcourt les sommets de P_2 dans le sens trigonométrique.

(1) S'ils forment une suite croissante (modulo 2π), le point O appartient à C_2. On peut alors ordonner la réunion des sommets de P_1 et P_2 de sorte à obtenir une étoile E centrée en O. Ceci se fait avec une complexité linéaire. L'enveloppe convexe de l'étoile E est égale à C.

(2) Sinon, ces angles sont compris entre deux valeurs différant d'au plus π et le polygone P_2 est contenu dans un secteur angulaire sortant de sommet O. Notons a et b les deux sommets de P_2 tels que P_2 soit contenu dans le secteur angulaire $\widehat{aOb}$. Soit alors E l'étoile obtenue en parcourant dans le sens trigonométrique les sommets de P_2 entre a et b puis ceux de P_1 dans le secteur complémentaire. Son enveloppe convexe est C. Une fois obtenue une étoile, on calcule son enveloppe convexe par la méthode du paragraphe précédent.

Analysons la complexité de l'algorithme ainsi obtenu, où N est le nombre de points. Une fois obtenus P_1 et P_2, le polygone P est obtenu avec une complexité $O(N)$ pour la fusion des listes et $O(N)$ pour le calcul de l'enveloppe convexe d'une étoile. La complexité $T(N)$ vérifie alors l'inégalité, $T(N) \leq 2T(N/2) + O(N)$, donc $T(N) \leq O(N \log N)$.

5. Diamètre d'un ensemble de points

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au calcul du *diamètre* d'un ensemble A de N points du plan, c'est-à-dire à la distance maximale entre deux points de l'ensemble.

Ce problème a une solution très simple : il suffit de calculer la distance entre chacun des $N(N+1)/2$ paires de points. La plus grande de ces distances est égale au diamètre. C'est un algorithme en $O(N^2)$.

On peut cependant montrer que le diamètre de A est égal à celui de son enveloppe convexe. Donc, on peut se restreindre aux sommets de cette enveloppe convexe. Mais dans le pire des cas, il se peut que tous les points de A sont des sommets de son enveloppe convexe, et on peut craindre d'avoir dépenser un temps de $O(N \log N)$ sans avoir éliminer aucun point.

Mais il existe des algorithmes plus efficaces que $O(N^2)$ pour le calcul du diamètre d'un polygone convexe. On peut utiliser le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Le diamètre d'un ensemble convexe est égal à la distance maximale entre deux droites de support parallèles.*

Definition 5.2. *Une droite de support d'un ensemble convexe C est une droite qui passe par un point de C, et telle que C soit inclus dans l'un des demi-plans défini par cette droite.*

On peut se convaincre par une figure simple que des droites de support parallèles ne peuvent pas passer par tous les couples de points d'un convexe. Une paire de points admettant des droites de support parallèles sont appelés antipodaux. Grâce au théorème 5.1, on peut se restreindre aux couples de points antipodaux, et le problème est de les trouver sans avoir à examiner tous les couples de points.

Considérons donc un polygone convexe C, et partons d'un sommet a_i de C. Parcourons les points de C à partir de a_i dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, jusqu'à atteindre un sommet $b_d^{(i)}$ qui est le plus loin possible de la droite (a_i, a_{i-1}) (s'il y en a plusieurs, on prend le premier rencontré). Remarquons que la suite de ces distances est croissante, puis décroissante. On n'a donc pas besoin de vérifier tous les sommets. De même, on définit $b_g^{(i)}$ comme étant le premier point situé à la plus grande distance de la droite (a_i, a_{i+1}), trouvé en parcourant les sommets depuis p_i, dans le sens des aiguilles d'une montre. Alors l'ensemble $C(a_i)$ des sommets situés entre $b_d^{(i)}$ et $b_g^{(i)}$ est égal à l'ensemble des points antipodaux avec a_i. En effet, soit $\alpha_i > \pi$ le secteur angulaire externe (rentrant) entre $[a_{i-1}, a_i]$ et $[a_i, a_{i+1}]$, alors a_i et a_j sont antipodaux si et seulement s'il existe une droite dans $\alpha_i \cup \alpha_j$. Chaque point a_j de $C(a_i)$ vérifie cette propriété, tandis que les autres sommets de C ne la vérifient pas.

Remarquons qu'une fois $b_d^{(i)}$ trouvé, on peut trouver $b_g^{(i)}$ en continuant à parcourir les points de C à partir de $b_d^{(i)}$, jusqu'à ce que la suite des distances décroisse. Attention : il peut y avoir deux points qui réalisent le maximum, en cas de cotés parallèles. Dans le cas contraire, $b_d^{(i)} = b_g^{(i+1)}$. Ainsi, en l'absence de cotés parallèles, il y a exactement N paires de points antipodaux.

Ceci suggère un algorithme qui détermine tous les couples de sommets antipodaux. Le problème est, pour optimiser l'algorithme, de trouver une et une seule fois chaque couple de points antipodaux. On utilise deux pointeurs p et q. Au début, p est en a_N et q en a_1.

On compare les aires du triangle $p, NEXT(p), NEXT(q)$ et du triangle $p, NEXT(p), q$, où $NEXT(a_i) = a_{i+1}$ si $1 \geq i \geq N-1$ et $NEXT(a_N) = a_1$, et on incremente q s'il y a lieu, jusqu'à ce que $q = b_d^{(1)}$. On pose alors $q_0 = q$. Les points $NEXT(p) = a_1$ et q sont alors antipodaux.

Ensuite, on fait une boucle qui incrémente d'abord p, puis détermine les points antipodaux à ce p, toujours par incrémentation successive de q, après comparaison des aires des triangles successifs. A la fin de cette petite boucle, q se trouve sur le $b_g^{(i)}$ correspondant à ce point p, ou bien, en cas d'existence de cotés parallèles, sur le point précédent ce $b_g^{(i)}$.

On arrête lorsque $q = a_1$.

Comme dans la boucle, p va de a_N à q_0 et q de q_0 à a_N, cela fait un total de N déplacements en l'absence de cotés parallèles, donc N points antipodaux, comme nous l'avions remarqué. De plus, il y a au plus $\lceil N/2 \rceil$ cotés parallèles, donc le nombre de sommets antipodaux est inférieur ou égal à $3N/2$. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 5.3. *Le diamètre d'un polygone convexe peut être calculé en temps linéaire par rapport au nombre de ses sommets.*

Références.

Computational geometry, de F. P. Preparata et M. I. Shamos.

Analyse fonctionelle, de Rudin.

Texte de A. Chambert-Loir : Calculer une enveloppe convexe. http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/convex.pdf