université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017** **Examen première session** **PARCOURS : LIMA 5032** **Code UE : N1MA5032** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 13/12/2016** **Heure : 14h30** **Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Corrigé	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que S_n est symétrique définie positive et déterminer sa décomposition de Cholesky.

Soit q_n la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de Gram dans la base canonique est S_n. C'est-à-dire, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ le vecteur des coordonnées de x dans la base canonique, $q_n(x) = {}^tXS_nX$.

$$q_n(x) = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

On applique l'algorithme de décomposition de Gauss à q_n. Pour $n = 2$: $q_2(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2$. Hypothèse de récurrence : supposons que

$$q_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{n-2} - x_{n-1})^2 + x_{n-1}^2.$$

On applique l'algorithme à q_n.

$$\begin{aligned} q_n(x) &= (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2\sum_{i=3}^{n} x_i^2 + -2\sum_{i=2}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= (x_1 - x_2)^2 + q_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 \end{aligned}$$

On a utilisé :

$$q_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2.$$

En utilisant l'algorithme de décomposition de Gauss, on a décomposé q en une somme de n carrés. On en déduit que q est définie positive. Soit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $S_n = {}^tUU$. C'est la décomposition de Cholesky de S_n.

Exercice 2

Soit $||.||$ une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On appelle conditionnement de A relativement à $||.||$ le nombre réel

$$cond(A) = ||A||.||A^{-1}||.$$

1. *Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $cond(\alpha A) = cond(A)$.*
2. *Montrer que si $||.||$ est une norme subordonnée, alors $||I|| = 1$. En déduire que $cond(A) \geq 1$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$.*
3. *Soit $cond_2$ le conditionnement relatif à la norme matricielle subordonnée à $||.||_2$. Montrer que si $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $cond_2(Q) = 1$.*
4. *Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\Delta B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient enfin X et $X + \Delta X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que*

$$AX = B \quad \text{et} \quad A(X + \Delta X) = B + \Delta B.$$

Montrer que

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leq cond(A)\frac{||\Delta B||}{||B||}$$

(c'est une majoration de l'erreur relative obtenue sur la solution de l'équation $AX = B$ en fonction de l'erreur relative commise sur le vecteur B).

Fait en TD (TD 5, exercice 11).

Exercice 3

Soient A et B deux matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$.
1. *Montrer que $A + B$ est positive.*
2. *On suppose A définie positive. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et C symétrique positive telles que $A + B = {}^tP(I_n + C)P$.*
3. *En déduire que si A est définie positive, $\det A + \det B \leq \det(A + B)$.*
4. *On ne suppose plus que A est définie positive, mais on suppose toujours qu'elle est positive. Pour tout entier k strictement positif, on définit $A_k = A + \dfrac{1}{k}I$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K$, alors A_k est définie positive. Montrer que l'inégalité $\det A + \det B \leq \det(A + B)$ est encore vérifiée.*

1. D'abord, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B$ donc $A + B$ est symétrique. De plus, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$ puisque A et B sont positives.

2. Comme A est symétrique définie positive, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$ (on peut même choisir P triangulaire supérieure aux coefficients diagonaux strictement positifs : c'est la décomposition de Cholesky de A). Soit $C = {}^tP^{-1}BP^{-1}$. Alors ${}^tC = C$, donc C est symétrique et pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXCX = {}^tX{}^tP^{-1}BP^{-1}X = {}^t(P^{-1}X)B(P^{-1}X) \geq 0.$$

Donc C est symétrique positive. De plus, $B = {}^tPCP$, donc

$$A + B = {}^tP(I_n + C)P.$$

3. On en déduit que $\det(A + B) = (\det P)^2 \det(I_n + C)$. Comme $\det P \neq 0$, $\det A = (\det P)^2$ et $\det B = (\det P)^2 \det C$, il suffit de montrer que

$$1 + \det C \leq \det(I_n + C)$$

Soient $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de C. Alors

$$1 + \det C = 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(I_n + C) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i).$$

Comme C est symétrique positive, ces valeurs propres sont réelles positives et en développant, on trouve

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i + S$$

où S est la somme des produits $\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}$ où $k \in [[2,n]]$ et $i_1 < \dots < i_k$, donc $S \geq 0$ et

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

On a donc bien démontré que

$$\det A + \det B \leq \det(A+B).$$

4. Soient λ un réel et k un entier naturel non nul. $\lambda \in \mathrm{Spec}A$ si et seulement si $\lambda + \dfrac{1}{k} \in \mathrm{Spec}A_k$. Comme $\mathrm{Spec}A \subset \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Spec}A_k \subset \mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $k \geq 1$, A_k est définie positive. On en déduit que pour tout B symétrique positive,

$$\det A_k + \det B \leq \det(A_k+B).$$

Comme $\lim A_k = A$ quand k tend vers $+\infty$, et comme le déterminant est continu, on obtient bien le résultat pour tous A et B symétriques positives.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. Soient $r_1,\dots,r_n$ des nombres réels. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on définit

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1 \\ r_{k-1} & \dots & r_1 & 1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R}) \quad et \quad R_k = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} \in M_{k,1}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le coefficient (i,j) de T_k est égal à $r_{|i-j|}$, où $r_0 = 1$. On suppose que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, la matrice T_k est définie positive. Soit le système

$$(1) \qquad T_n X = -R_n.$$

1. *Rappeler sans démonstration la complexité algébrique de la résolution d'un système de taille n par la méthode du pivot de Gauss.*
La suite de l'exercice porte sur un algorithme plus efficace pour la résolution du système (1).
2. *Pour tout entier k, on note E_k la matrice de $M_k(\mathbb{R})$ dont le coefficient (i,j) est égal à $(E_k)_{i,j} = \delta_{i,k+1-j}$. Ainsi :*

$$E_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout (i,j), exprimer le coefficient (i,j) de E_kT_k et de T_kE_k en fonction des r_l et conclure que $E_kT_k = T_kE_k$.
3. *Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. On suppose que l'on a trouvé un vecteur colonne X de $M_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que*

$$T_k X = -R_k$$

et on cherche à résoudre le système de taille $k+1$

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} T_k & E_kR_k \\ {}^tR_kE_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_k \\ -r_{k+1} \end{pmatrix}$$

où les inconnus sont $Y \in M_{k,1}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$.

Soit donc $\begin{pmatrix} Y \\ t \end{pmatrix}$ la solution de (2). Montrer que

$$Y = X + tE_kX \quad \text{et} \quad (1 + {}^tR_kX)t = -r_{k+1} - {}^tR_kE_kX.$$

4. *Calculer $({}^tXE_k, 1)T_{k+1}{}^t({}^tXE_k, 1)$ et montrer que $1 + {}^tR_kX \neq 0$.*
5. *En déduire un algorithme de complexité algébrique $O(n^2)$ pour résoudre (1).*
6. *En utilisant cet algorithme, résoudre le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

1. Cette complexité est en $O(n^3)$.
2. $(E_kT_k)_{i,j} = \sum_l (E_k)_{i,l}(T_k)_{l,j} = (T_k)_{k+1-i,j}$ puisque $(E_k)_{i,j} = \delta_{i,k+1-j}$. On obtient : $(E_kT_k)_{i,j} = r_{|k+1-i-j|}$. De même, on trouve $(T_kE_k)_{i,j} = r_{|k+1-i-j|}$. Donc $T_kE_k = E_kT_k$.
3. Comme T_{k+1} est définie positive, donc inversible, la solution est unique. Il suffit de vérifier que la solution proposée convient. On remarque que $E_k^2 = I_k$.

Calculons d'abord

$$T_kY = T_kX + tT_kE_kX = -R_k - tE_kR_k$$

puisque $T_kE_k = E_kT_k$ et $T_kX = -R_k$. On obtient donc

$$T_kY + tE_kR_k = -R_k.$$

De plus :

$$\begin{aligned} {}^tR_kE_kY + t &= {}^tR_kE_k(X + tE_kX) + t \\ &= {}^tR_kE_kX + t{}^tR_kX + t \end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} Y \\ t \end{pmatrix}$ est solution si et seulement si ${}^tR_kE_kX + t{}^tR_kX + t = -r_{k+1}$, c'est-à-dire

$$({}^tR_kX + 1)t = -r_{k+1} - {}^tR_kE_kX.$$

4. On trouve

$$({}^tXE_k, 1)T_{k+1}{}^t({}^tXE_k, 1) = {}^tR_kX + 1.$$

Comme T_{k+1} est définie positive, cela prouve que ${}^tR_kX + 1 > 0$.

5. Voilà l'algorithme.

$X = (-r_1)$.
Pour k de 1 à $n-1$:
  $t = -({}^tR_kX + 1)^{-1}(r_{k+1} + {}^tR_kE_kX)$.
  $Y = X + tE_kX$
  $X = \begin{pmatrix} Y \\ t \end{pmatrix}$
Sortir X et terminer.

6. On initialise à $X = (-1/2)$. Pour $k = 1$, on trouve $t = 1/15$ et $Y = -8/15$, donc $X = {}^t(-8/15, 1/15)$. Pour $k = 2$, on trouve $t = -1/28$, puis $Y = {}^t(-15/28, -3/35)$, d'ou le résultat :

$$X = {}^t(-15/28, 3/35, -1/28).$$