Université Bordeaux 1 **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**

Mathématiques Année 2016–2017

Devoir Surveillé du 9 novembre 2016

Corrigé

Exercice 1 – *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) *Résoudre $AX = B$, déterminer une matrice de permutation P telle que PA puisse s'écrire sous la forme $PA = LU$ et expliciter cette décomposition.*

On concatène A et B et on applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice obtenue.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad l_2 \longleftrightarrow l_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

On trouve donc que $PA = LU$ où P, L, U sont les matrices suivantes.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

De plus, l'équation $AX = B$ est équivalente au système triangulaire

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ -5x_3 = -5 \end{cases}$$

qui admet comme unique solution $X = {}^t(1, 1, 1)$.

2) *Calculer* $\det A$.

$\det A = \det P \det U = (-1) \cdot (2 \cdot 4 \cdot (-5)) = 40.$

Exercice 2 – *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que* $\operatorname{spec} A = \{0\}$. *On veut démontrer qu'il existe une suite (B_k) d'éléments de $M_n(\mathbb{C})$ semblables à A qui converge vers 0.*

1) *Soit T une matrice triangulaire supérieure semblable à A. Que peut-on dire des coefficients diagonaux de T ?*

Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A. Ils sont donc égaux à 0.

2) *Soit $D = \mathrm{diag}(1, 2^{-1}, \ldots, 2^{1-n})$. On pose $B_k = D^{-k} T D^k$. Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$. Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on note t_{ij} (resp. b_{kij}) le coefficient (i,j) de T (resp. B_k). Exprimer b_{kij} en fonction de t_{ij} et k.*

$D^{-k} = \mathrm{diag}(1, 2^k, \ldots, 2^{k(n-1)}$ donc la multiplication à gauche par D^{-k} multiplie chaque ligne i par $2^{(i-1)k}$. De même, la multiplication à droite par D^k multiplie chaque colonne j par $2^{(1-j)k}$. On trouve donc l'identité suivante.

$$b_{kij} = t_{ij} 2^{(i-j)k}$$

3) *Montrer que la suite (B_k) converge vers 0 quand k tend vers $+\infty$.*

Quand $i \geqslant j$, $t_{ij} = 0$, donc $b_{ijk} = 0$. Si $j > i$, alors

$$\lim_{k \to \infty} b_{ijk} = \lim_{k \to \infty} t_{ij} 2^{(i-j)k} = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{k \to \infty} B_k = 0.$$

Exercice 3 – *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout i, le coefficient a_{ii} est non nul. On décompose $A = D + L + U$, où D est diagonale, L triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure et où les coefficients diagonaux de L et de U sont nuls. On rappelle les faits suivants.*

(1) *La matrice d'itération pour la méthode de Gauss-Seidel est égale à $G = -(D+L)^{-1}U$.*

(2) *Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. La méthode de relaxation $\mathcal{R}_\omega$ issue de la méthode de Gauss-Seidel pour le paramètre ω a pour matrice d'itération $R_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$.*

(3) *Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss-Seidel converge quelque soit le vecteur initial choisi.*

On suppose que A est à diagonale strictement dominante et que $\omega \in]0, 1]$. Cet exercice a pour but de démontrer que dans ce cas, la méthode de relaxation $\mathcal{R}_\omega$ converge quelque soit le vecteur initial choisi (résultat énoncé en cours, mais non démontré).

1) *Pourquoi peut-on dire que ce résultat est vrai dans le cas où $\omega = 1$?*

Dans ce cas, $R_w = G$. Comme A est à diagonale strictement dominante, on sait que la méthode converge quelque soit le vecteur initial choisi.

On supposera dorénavant que $\omega \in]0, 1[$. Soit λ une valeur propre de R_ω. On suppose par l'absurde que $|\lambda| \geqslant 1$. Soit P le polynôme caractéristique de R_ω. On note $L' = D^{-1}L$ et $U' = D^{-1}U$.

2) *Montrer que $P(\lambda) = \det\left((\lambda + w - 1)I + \lambda \omega L' + \omega U'\right)$.*

Remplaçons L et U par DL' et DU' dans le produit $(D+\omega L)^{-1}(1-\omega)D - \omega U)$. On trouve

$$\begin{aligned}(D + \omega L)^{-1}(1-\omega)D - \omega U) &= (D(1 + \omega L'))^{-1} D((I - \omega)I - \omega U') \\ &= (I + \omega L')^{-1}((1-\omega)I - \omega U')\end{aligned}$$

On va appliquer ce résultat dans l'expression de $P(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det\left(\lambda I - (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)\right)\\
&= \det\left(\lambda I - (I+\omega L')^{-1}((1-\omega)I - \omega U')\right)\\
&= \det(I+\omega L')\det\left((\lambda I - (I+\omega L')^{-1}((1-\omega)I - \omega U')\right)\\
&= \det\left(\lambda(I+\omega L') - ((1-\omega)I - \omega U')\right)
\end{aligned}$$

puisque $\det(I+\omega L') = 1$. En réordonnant, on trouve

$$P(\lambda) = \det\left((\lambda+\omega-1)I + \lambda\omega L' + \omega U'\right).$$

3) *Justifier pourquoi* $\lambda+\omega-1 \neq 0$ *et montrer que*

$$P(\lambda) = (\lambda+\omega-1)^n \det\left(I + \alpha L' + \beta U'\right)$$

où

$$\alpha = \frac{\lambda\omega}{\lambda+\omega-1} \quad \textit{et} \quad \beta = \frac{\omega}{\lambda+\omega-1}.$$

$|\lambda+\omega-1| \geqslant |\lambda| - |\omega-1| = |\lambda| - (1-\omega)$. Comme $|\lambda| \geqslant 1$ et $\omega > 0$, $|\lambda| - (1-\omega) > 0$.

Avec les notations de l'énoncé,

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det\left((\lambda+\omega-1)(I+\alpha L' + \beta U')\right)\\
&= (\lambda+\omega-1)^n \det\left(I + \alpha L' + \beta U'\right)
\end{aligned}$$

puisque la matrice dont on calcule le déterminant est de taille $n \times n$.

4) *On pose* $\lambda = ae^{i\theta}$ *où* $a \in [1, +\infty[$. *Montrer que*

$$|\alpha|^2 = \frac{a^2\omega^2}{(a\cos\theta + \omega - 1)^2 + a^2\sin^2\theta}.$$

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2 &= \frac{|\lambda\omega|^2}{|\lambda+\omega-1|^2}\\
&= \frac{a^2\omega^2}{(a\cos\theta+\omega-1)^2 + a^2\sin\theta}
\end{aligned}$$

(on utilise l'égalité $|x+iy|^2 = x^2 + y^2$ si $x, y \in \mathbb{R}$).

5) *Montrer que* $|\beta| \leqslant |\alpha| \leqslant 1$.

$|\alpha| = |\lambda\beta| \geqslant |\beta|$ puisque $|\lambda| \geqslant 1$.

Pour établir la seconde inégalité, nous allons montrer que

$$(a\cos\theta+\omega-1)^2 + a^2\sin\theta \geqslant a^2\omega^2.$$

$$\begin{aligned}
(a\cos\theta+\omega-1)^2 + a^2\sin\theta &= a^2 + 2a(\omega-1)\cos\theta + (\omega-1)^2\\
&\geqslant a^2 - 2a(\omega-1) + (\omega-1)^2\\
&\geqslant (a-\omega+1)^2.
\end{aligned}$$

On conclut en minorant la différence

$$
\begin{aligned}
(a-\omega+1)^2-a^2\omega^2 &= (a+1-(a+1)\omega)(a+1+(a-1)\omega)\\
&= (a+1)(1-\omega)(a+1+(a-1)\omega)\\
&> 0
\end{aligned}
$$

puisque chacun des facteurs de ce produit est strictement positif.

6) *En déduire que $P(\lambda) \neq 0$, et expliquer pourquoi ce résultat est absurde.*

On note a_{ij}, l_{ij}, u_{ij}, l'_{ij} et u'_{ij} les coefficients respectifs de A, L, U, L', U'. Comme A est à diagonale strictement dominante, $\sum_{j<i}|l_{ij}| + \sum_{j>i}|u_{ij}| < |a_{ii}|$ pour tout i. Donc $\sum_{j<i}|l'_{ij}| + \sum_{j>i}|u'_{ij}| < 1$ pour tout i. Comme $|\beta| \leqslant |\alpha| \leqslant 1$, on en déduit que pour tout i

$$\sum_{j<i}|\alpha l'_{ij}| + \sum_{j>i}|\beta u'_{ij}| < 1$$

donc $I + \alpha L' + \beta U'$ est à diagonale strictement dominante. Le déterminant de cette matrice est donc non nul. On en déduit que $P(\lambda) \neq 0$. C'est contraire à l'hypothèse puisque λ est supposée être une valeur propre de R_ω, et donc doit annuler son polynôme caractéristique P.

7) *En déduire que $\rho(R_\omega) < 1$ et conclure.*

L'hypothèse $|\lambda| \geqslant 1$ est donc absurde. Ainsi, toutes les valeurs propres de R_ω sont de module strictement inférieur à 1. On a donc démontré que $\rho(R_\omega) < 1$. On en déduit que la méthode converge quelque soit le vecteur initial choisi.