Université Bordeaux 1 **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**
Mathématiques Année 2017–2018

Devoir Surveillé, 8 novembre 2017
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – [Décomposition $A = PLU$]

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre $AX = B$, déterminer une matrice de permutation P telle que PA puisse s'écrire sous la forme $PA = LU$ et expliciter cette décomposition.

2) En utilisant le résultat précédent, calculer $\det A$.

Exercice 2 – [Norme matricielle et conditionnement]

Soit $|| * ||$ une norme définie sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$. On note également $|| * ||$ sa norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$\mathrm{Cond}(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||.$$

Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. On désire calculer le produit $AB = C$, sachant que la valeur de B dont on dispose est entachée d'erreur. Soit $B + \Delta B$ cette valeur. On calcule donc en réalité $C + \Delta C = A(B + \Delta B)$. Montrer que

$$\frac{||\Delta C||}{||C||} \leqslant \mathrm{Cond}(A) \frac{||\Delta B||}{||B||}.$$

Exercice 3 – [Rayon spectral des matrices positives]

Soient m et n deux entiers strictement positifs. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dans cet exercice, on dit que A est positive (resp. strictement positive) et on note $0 \leqslant A$ (resp. $0 < A$) si ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $A \leqslant B$ (resp. $A < B$) si $0 \leqslant B - A$ (resp. $0 < B - A$).

On considère la norme $|| * ||_\infty$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et sa norme subordonnée dans $M_n(\mathbb{R})$, que l'on note aussi $|| * ||_\infty$.

1) Soient A, B, A', B' des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant A \leqslant B$ et $0 \leqslant A' \leqslant B'$. Montrer les propriétés suivantes.

a) $0 \leqslant AA' \leqslant BB'$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 \leqslant A^k \leqslant B^k$.

c) $||A||_\infty \leqslant ||B||_\infty$.

d) $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ une matrice positive de $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout i, on note

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

2) Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_i = \alpha$ pour tout i, alors $\rho(A) = \alpha$.

3) Soit $\alpha = \min_{i \in [[1,n]]} \alpha_i$.

a) Montrer que $\alpha \leqslant \rho(A)$. *Indication :* si $\alpha \neq 0$, on pourra utiliser la matrice $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par : $b_{ij} = \dfrac{\alpha}{\alpha_i} a_{ij}$.

b) Justifier alors l'encadrement

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$$

(il suffit de justifier la seconde inégalité puisque la première provient du a)).

4) Soit $X = (x_i) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ strictement positif. Soit $D_X = \mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_n)$.

a) Calculer le coefficient (i, j) de $D_X^{-1} A D_X$.

b) Montrer que

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i}$$

5) Montrer que si A admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et

$$\rho(A) = \sup_{0 < X} \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right) = \inf_{0 < X} \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right).$$