université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018** **Examen première session** **PARCOURS : LIMA 5032 Code UE : N1MA5032** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 18/12/2017 Heure : 14h30 Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Jehanne	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $X = {}^t x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit

$$q(x) = {}^t XSX.$$

q est donc une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de Gram dans la base canonique est S.
1. Appliquer l'algorithme de décomposition de Gauss à q. En déduire que q est définie positive et donner la décomposition de Cholesky $S = {}^t RR$ de S.
2. Calculer R^{-1} et en déduire S^{-1}.

Exercice 2

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Soit $D = \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$. On souhaite appliquer la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution d'une équation $AX = B$.
1. Soit $i \in [[1, n]]$, et soit e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. En considérant ${}^t e_i A e_i$, montrer que $a_{i,i} > 0$.
2. Montrer que pour toute matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, ${}^t\overline{x}Sx \in \mathbb{R}_+^*$ (on pourra par exemple utiliser la décomposition de Cholesky de S).

Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,j} = a_{i,j}$ si $i > j$ et $m_{i,j} = 0$ si $i \leq j$. Alors $A = M + D + {}^t M$ et la matrice d'itération de la méthode est

$$G = -(D + M)^{-1}({}^t M).$$

3. Soient $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{a_{1,1}}, \ldots, \sqrt{a_{n,n}})$, $M_1 = \Delta^{-1} M \Delta^{-1}$ et $G_1 = \Delta G \Delta^{-1}$. Montrer que

$$G_1 = -(I_n + M_1)^{-1}({}^t M_1).$$

4. Soient $\lambda \in \mathrm{Spec}(G_1)$ et $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $G_1 x = \lambda x$ et ${}^t\overline{x}x = 1$. On pose ${}^t\overline{x}M_1 x = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les égalités suivantes.

$${}^t\overline{x}({}^t M_1)x = a - ib \quad , \quad -{}^t\overline{x}({}^t M_1)x = \lambda(1 + {}^t\overline{x}M_1 x) \quad , \quad |\lambda|^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + 2a + a^2 + b^2}.$$

5. Montrer que $\Delta^{-1}A\Delta^{-1}$ est symétrique définie positive.
6. En considérant ${}^t\overline{x}\Delta^{-1}A\Delta^{-1}x$, montrer que $1+2a>0$. Conclure que $|\lambda|<1$ et que $\rho(G_1)<1$.
7. En déduire que la méthode converge quelque soit le vecteur initial choisi.

Exercice 3

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On munit $M_{m,1}(\mathbb{R})$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(X|Y) = {}^tXY$. Dans ces deux espaces, on note $||.||_2$ la norme associée : $||X||_2 = \sqrt{(X|X)}$. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $\ker A = \ker({}^tAA)$. En déduire que $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}({}^tAA)$.
2. Justifier l'existence de réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et d'une matrice $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$ {}^tV{}^tAAV = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{et} \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n. $$

3. Pour tout $j \in [[1,n]]$, on note V_j la j-ème colonne de V et $Y_j = AV_j \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. Soient $i,j \in [[1,n]]$ tels que $i \neq j$, justifier les égalités

$$ {}^tY_iY_j = 0 \quad \text{et} \quad {}^tY_iY_i = \lambda_i. $$

4. Soit $r = \mathrm{rg}A$. Expliquer pourquoi $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [[1,r]]$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [[r+1,n]]$.
5. Pour $j \in [[1,r]]$, on pose

$$ \mu_j = \sqrt{\lambda_j} \quad \text{et} \quad U_j = \frac{1}{\mu_j}Y_j. $$

Montrer que $(U_1, \dots, U_r)$ est une famille orthonormale de $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

On complète cette base en une base orthonormale $(U_1, \dots, U_m)$ de $M_{m,1}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $U = (U_1|\dots|U_m)$ de $M_m(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont les U_j (donc U est orthogonale).
6. Soit $D = {}^tUAV$. Montrer que D peut s'écrire par blocs sous la forme

$$ D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) $$

où $D_0 = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_r) \in M_r(\mathbb{R})$.
7. Nous étudions ici une méthode de résolution du problème des moindres carrés qui utilise le résultat précédent. Soit $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. On cherche $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme minimale tel que $||AX_0 - B||_2$ soit minimale, c'est-à-dire tel que $||AX_0 - B||_2 \leq ||AX - B||_2$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $Z = {}^tVX = {}^t(z_1, \dots, z_n)$ et $C = {}^tUB = {}^t(c_1, \dots, c_m)$ Montrer que

$$ ||AX - B||_2^2 = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i z_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{m} c_i^2. $$

b) Soient

$$ X_0 = \sum_{j=1}^{r} \mu_j^{-1} c_j V_j \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = X_0 + \mathrm{Vect}(V_{r+1}, \dots, V_n). $$

Montrer que $||AX - B||_2$ est minimale si et seulement si $X \in \mathcal{S}$.

c) Pour tout $X \in \mathcal{S} \setminus \{X_0\}$, montrer que $||X_0||_2 < ||X||_2$.

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En utilisant les questions précédentes, déterminer l'ensemble des $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $||AX - B||_2$ soit minimale (on pourra remarquer qu'il est inutile de calculer U_3).